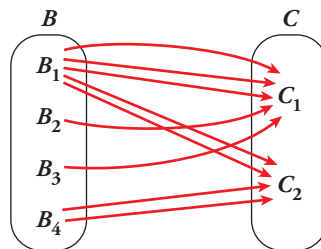


## Resuelve

Página 53

### Vuelos internacionales

- Aquí tienes ahora, representados mediante flechas, los vuelos que permiten viajar el martes desde el país  $B$  anterior hasta otro país  $C$ :



Representa, mediante una tabla similar a la anteriormente descrita, la información recogida en el diagrama de vuelos entre los países  $B$  y  $C$ .

	$C_1$	$C_2$
$B_1$	3	2
$B_2$	1	0
$B_3$	1	0
$B_4$	0	2

# 1 Nomenclatura. Definiciones

Página 55

1 Escribe las matrices traspuestas de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F = (5 \ 4 \ 6 \ 1)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

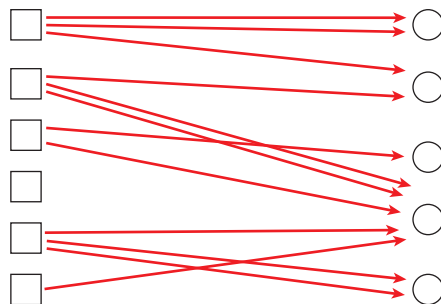
$$E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 Escribe una matriz  $X$  tal que  $X^t = X$ ; esto es, que sea simétrica.

Por ejemplo,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

3 Escribe una matriz que describa lo siguiente:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2 Operaciones con matrices

### Página 56

1 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula  $E = 2A - 3B + C - 2D$ .

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

### Página 59

2 Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix} \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix} \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3 Intenta conseguir una matriz  $I_3$  de dimensión  $3 \times 3$  que, multiplicada por cualquier matriz cuadrada  $A (3 \times 3)$ , la deje igual.

Es decir:  $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$

La matriz  $I_3$  que verifica la igualdad anterior se llama matriz unidad de orden 3.

Una vez que sepas cuál es su fisonomía, sabrás obtener la matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3 Propiedades de las operaciones con matrices

### Página 60

1 Comprueba las propiedades 2 y 3 del producto de números por matrices, tomando:

$$a = 3, b = 6 \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD 2:

$$\left. \begin{aligned} 9A &= \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ 3A + 6A &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} 9A = 3A + 6A$$

PROPIEDAD 3:

$$\left. \begin{aligned} 3(A+B) &= 3 \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ 3A + 3B &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} 3(A+B) = 3A + 3B$$

### Página 61

2 Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} A \cdot (B+C) &= A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C &= \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left. \begin{aligned} (B+C) \cdot D &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D &= \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (B+C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

## 4 Matrices cuadradas

### Página 63

1 Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices en el supuesto de que la tengan:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a)  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Así:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (-1/2) \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$

Así:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c)  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$

En la parte de la izquierda, la 2.<sup>a</sup> fila está compuesta por ceros.

Por tanto, la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$  no tiene inversa.

2 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 4 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 7 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$

En la parte de la izquierda, la 3.<sup>a</sup> fila está compuesta por ceros.

Por tanto, la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  no tiene inversa.

b)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$\begin{array}{l} (1.^a) - 3 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Así:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$c) \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ -5 \cdot (2.^a) + (3.^a) \\ -(1/10) \cdot (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) - 3 \cdot (3.^a) \\ -(1/5) \cdot (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right)$$

$$\text{Así: } \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array} \right)$$

**Página 65**

**3** Para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**comprueba:**

a)  $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b)  $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c)  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$$a) \left. \begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$b) \left. \begin{array}{l} (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \right\} (A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

$$c) \left. \begin{array}{l} A \cdot (B \cdot C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

**4** Sean  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

Encuentra  $X$  que cumpla:  $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$ .

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

**5 Encuentra dos matrices,  $A$  y  $B$ , de dimensión  $2 \times 2$  que cumplan:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**6 Encuentra dos matrices  $X$  e  $Y$  que verifiquen:**

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

**7 Averigua cómo ha de ser una matriz  $X$  que cumpla la siguiente condición:**

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x+z \\ x+y = y+t \\ z = z \\ z+t = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} z=0 \\ x=t \end{array}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son números reales cualesquiera.}$$

**8 Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a)  $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

b)  $(A - B) \cdot C$

c)  $A \cdot B \cdot C$

a)  $(A \cdot B) + (A \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b)  $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c)  $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

**9 Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , comprueba que  $(A - I)^2 = 0$ .**

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**10 Halla la inversa de estas matrices:**

a)  $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a)  $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x+3z & 7y+3t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} 7x+3z=1 \\ 2x+z=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=1 \\ z=-2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 7y+3t=0 \\ 2y+t=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y=-3 \\ t=7 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ .

b)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x-2z & 3y-2t \\ -8x+5z & -8y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} 3x-2z=1 \\ -8x+5z=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=-5 \\ z=-8 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 3y-2t=0 \\ -8y+5t=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y=-2 \\ t=-3 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es  $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$ .

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1, b = 0, c = 0, 2d = 0, 2e = 1, 2f = 0, g = 0, h = 0, i = 1$

Por tanto, la inversa es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} a+2d+3g=1 \\ d+2g=0 \\ d+g=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a=1 \\ d=0 \\ g=0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} b+2e+3h=0 \\ e+2h=1 \\ e+h=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b=-1 \\ e=-1 \\ h=1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} c+2f+3i=0 \\ f+2i=0 \\ f+i=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c=-1 \\ f=2 \\ g=-1 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .



**11 Resuelve estas ecuaciones:**

a)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$

b)  $Y \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z - \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Llamamos  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$ .

La ecuación es  $AX + B = C \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$ .

Calculamos  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) + 8 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} -1 \cdot (1.^a) + 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a)/(-3) \\ (2.^a)/(-1) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -16 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) La ecuación es, siendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  las mismas matrices del apartado anterior:

$$YA + B = C \Rightarrow Y = (C - B)A^{-1}$$

$$Y = \left[ \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -16 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 & -27 \\ 184 & 71 \end{pmatrix}$$

c) Llamamos  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

La ecuación es  $AZ - B = C \Rightarrow Z = A^{-1}(C + B)$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) - (3.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)/(-1) \end{array} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 6 & 13 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -7 \\ 2 & -7 & -5 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

## 6 Rango de una matriz

Página 68

1 Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 3$$

## 7 Forma matricial de un sistema de ecuaciones

Página 69

1 Expresa en forma matricial y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3z = 2 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3z = 2 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_C$$

En la página 62 hemos calculado  $A^{-1}$ .

$$A \cdot X = C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 106$ ,  $y = 64$ ,  $z = 36$

$$b) \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_C$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 1$ ,  $y = -5$

2 Expresa en forma matricial y resuelve.

$$a) \begin{cases} x - 2y - 3z - t = 0 \\ y + 2z = 4 \\ 2y + 3z + t = 1 \\ 3x - 2y + t = -2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = -1 \\ z + t = 4 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x - 2y - 3z - t = 0 \\ y + 2z = 4 \\ 2y + 3z + t = 1 \\ 3x - 2y + t = -2 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_C$$

Calculamos la inversa de la matriz  $A$ :

$$|A| = -5 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

*Solución:*  $x = 1, y = 0, z = 2, t = -5$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ y + z = -1 \\ z + t = 4 \\ t = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_C$$

Calculamos la inversa de la matriz  $A$ :

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*Solución:*  $x = 8, y = -3, z = 2, t = 2$

## Ejercicios y problemas resueltos

Página 70

### 1. Matrices traspuestas

**Hazlo tú.** Comprueba que:  $(A + B)^t C^t = A^t \cdot C^t + B^t \cdot C^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^t = \left[ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^t C^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot C^t + B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido el mismo resultado, luego la igualdad es cierta.

### 2. Cálculo de los elementos de una matriz

**Hazlo tú.** Dada la matriz  $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ , calcula  $a$  para que  $X^2 - X = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ .

$$X^2 - X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a-1) & -1 \\ 0 & a(a+1) \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{pmatrix} a(a-1) & -1 \\ 0 & a(a+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a(a-1) = 12 \\ a(a+1) = 20 \end{cases} \rightarrow a = 4$$

### 3. Operaciones con matrices

**Hazlo tú.** Halla los valores de  $a$  para los cuales  $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  verifica la ecuación  $X^2 - 3X + 2I = 0$ .

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^2 - 3X + 2I = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 3a + 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - 3a + 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a_1 = 2, a_2 = 1$$

**Página 71**

**5. Matrices conmutables**

**Hazlo tú.** Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtén todas las matrices  $B$  que conmutan con ella.

La matriz  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ha de verificar  $A \cdot B = B \cdot A$ .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{cases}$$

De la 1.ª ecuación y de la 4.ª ecuación obtenemos  $c = 0$ .

De la 2.ª ecuación obtenemos  $a = d$ .

Por tanto,  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Página 72**

**7. Despejar una matriz multiplicando por las inversas de otras dos**

**Hazlo tú.** Halla la matriz  $X$  que verifica  $AXB = A + B$  siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Multiplicamos en los dos miembros de la ecuación  $AXB = A + B$  por  $A^{-1}$  a la izquierda y por  $B^{-1}$  a la derecha:

$$AXB = A + B \rightarrow X = A^{-1}(A + B)B^{-1} = (A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \rightarrow X = B^{-1} + A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

**8. Ecuación matricial: sacar factor común**

**Hazlo tú.** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , halla la matriz  $X$  que verifica:

$$AX - A = B - C$$

$$AX - A = B - C \rightarrow A(X - I) = B - C$$

Multiplicamos en los dos miembros por  $A^{-1}$  a la izquierda:

$$X - I = A^{-1}(B - C) \rightarrow X = I + A^{-1}(B - C)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Página 73

9. Potencia de una matriz

**Hazlo tú.** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , calcula  $A^n$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}; \dots \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

10. Rango de una matriz

**Hazlo tú.** Estudia el rango de la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

según los distintos valores de  $m$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - m \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-m & 2-2m \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)/(1-m) \\ (3.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - m \cdot (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2-2m \end{pmatrix}$$

Si  $m = -1 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$  porque las dos primeras filas son L.I. y la tercera es una fila de ceros.

Si  $m \neq -1 \rightarrow \text{ran}(M) = 3$ .

## Ejercicios y problemas guiados

Página 74

### 1. Matriz inversa igual a traspuesta

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , calcular los valores de  $a$  y  $b$  para que la matriz inversa de  $A$  coincida con su traspuesta.

$$A^{-1} = A^t \rightarrow AA^{-1} = AA^t \rightarrow I = AA^t$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ ab=0 \\ b^2+1=1 \end{cases} \rightarrow a=\pm 1, b=0$$

### 2. Ecuación con matrices

Hallar una matriz  $X$  tal que  $AX + B = I$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Método 1

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4a+5c & 4b+5d \\ -3a-4c & -3b-4d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4a+5c & 4b+5d+1 \\ 1-4c-3a & -3b-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4a+5c=1 \\ 4b+5d+1=0 \\ 1-4c-3a=0 \\ -3b-4d=1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow a=-1, b=1, c=1, d=-1 \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Método 2

$$AX + B = I \rightarrow AX = I - B \rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



### 3. Ecuación matricial

Determinar la matriz  $X$  que verifique  $AXA - B = 0$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y  $0$  la matriz nula de orden 2.

$$AXA - B = 0 \rightarrow AXA = B \rightarrow X = A^{-1}BA^{-1}$$

Hallamos la inversa de  $A$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) + 2 \cdot (1.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)/3 \\ -(2.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

### 4. Rango de una matriz

Estudiar el rango de la matriz  $M$  según los valores del parámetro  $t$ .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8 - 3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8 - 3t & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 - 3t & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 3 \cdot (2.^a)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La tercera fila es L.D. de las otras dos, luego el rango no es 3.

Las dos primeras filas son L.I., independientemente del valor de  $t$ , luego  $\text{ran}(M) = 2$  para cualquier valor de  $t$ .

### 5. Ecuación con infinitas soluciones

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ , hallar una matriz  $X$  tal que  $XAX^{-1} = B$ .

$$XAX^{-1} = B \rightarrow XA = BX$$

Llamamos  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$$\left. \begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} \\ BX &= \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a - 9c & 8b - 9d \\ 6a - 7c & 6b - 7d \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{Igualando obtenemos un sistema de ecuaciones.}$$

$$\left. \begin{aligned} 2a &= 8a - 9c \\ 2c &= 6a - 7c \end{aligned} \right\} \rightarrow c = \frac{2}{3}a$$

$$\left. \begin{aligned} -b &= 8b - 9d \\ -d &= 6b - 7d \end{aligned} \right\} \rightarrow b = d$$

Soluciones:  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ (2/3)a & b \end{pmatrix}$

De todas las posibles soluciones, podemos tomar  $a = 3$  y  $b = 1$ , y obtenemos  $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

## Ejercicios y problemas propuestos

Página 75

### Para practicar

#### Operaciones con matrices. Matriz inversa

1 Efectúa, si es posible, las siguientes operaciones:

$$A \cdot B \quad B \cdot D \quad 3B - 2C \quad B \cdot C \quad D \cdot D^t$$

$$\text{siendo: } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{(3 \times 2)} \cdot B_{(2 \times 4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{(2 \times 4)} \cdot D_{(4 \times 1)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$3B - 2C = 3 \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$B_{(2 \times 4)} \cdot C_{(2 \times 4)} \rightarrow$  No se pueden multiplicar.

$$D_{(4 \times 1)} \cdot D^t_{(1 \times 4)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -15 & 5 & 10 \\ -15 & 9 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

calcula:

- a)  $A \cdot B$                       b)  $B \cdot A$                       c)  $B^{-1}$                       d)  $(A + B)(A - B)$   
e)  $A^2 - B^2$                       f)  $(A + B)^2$                       g)  $A^2 + B^2 + 2AB$

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) + (1/2) \cdot (2.^a) \\ (2.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1/2 \cdot (1.^a) \\ (-1/2) \cdot (2.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Por tanto, } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d) (A+B)(A-B) = \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 20 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f) (A+B)^2 = \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$$

$$g) A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 15 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 2 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$$

**3** Dada la matriz cuadrada  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ , comprueba que  $(A+I)^2 = 0$  y expresa  $A^2$  como combinación lineal de  $A$  e  $I$ .

$$A+I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos  $A^2$  como combinación lineal de  $A$  e  $I$ :

$$(A+I)^2 = 0 \rightarrow (A+I) \cdot (A+I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = 0 \rightarrow A^2 = -2A - I$$

**4** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , averigua cuál de las siguientes matrices es su inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad M \text{ no es inversa de } A.$$

$$A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad N \text{ es la inversa de } A.$$

**5** Halla las matrices inversas de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad |B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}; \quad |C| = 1 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**6 a)** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , prueba que  $A^3$  es la matriz nula.

**b)** Demuestra después que la matriz  $I + A + A^2$  es la matriz inversa de  $I - A$ .

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Veamos que  $I + A + A^2$  es la inversa de  $I - A$ :

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - 0 = I$$

Como  $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$ , entonces  $I + A + A^2$  es la inversa de  $I - A$ .

7 a) Comprueba que  $A^2 = 2A - I$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  e  $I$  la matriz unidad de orden 3.

b) Utiliza la igualdad anterior para calcular  $A^4$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} \\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A^2 = 2A - I$$

b) Calculamos  $A^4$ :

$$\begin{aligned} A^4 &= (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 = \\ &= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I = \\ &= 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8 Dada la siguiente matriz:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ , prueba que se verifica  $A^3 + I = 0$  y utiliza esta igualdad para obtener  $A^{10}$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 = -I$$

Por tanto:

$$A^4 = -I \cdot A = -A$$

$$A^5 = -A \cdot A = -A^2$$

$$A^6 = -A^2 \cdot A = -A^3 = I$$

$$A^7 = A$$

$$A^{10} = A^7 \cdot A^3 = A \cdot (-I) = -A$$

**Rango de una matriz**

**9** Estudia el rango de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.ª) \\ (2.ª) + 2 \cdot (1.ª) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.ª) \\ (2.ª) + 2 \cdot (1.ª) \\ (3.ª) - 12 \cdot (1.ª) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.ª) \\ (2.ª) - 2 \cdot (1.ª) \\ (3.ª) - 3 \cdot (1.ª) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.ª) \\ (2.ª) \\ 6 \cdot (3.ª) - 9 \cdot (2.ª) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.ª) \\ (2.ª) \\ -2 \cdot (3.ª) + (2.ª) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(E) = 3$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(F) = 3$$

**10** Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.ª) \\ (2.ª) - 2 \cdot (1.ª) \\ (3.ª) - (1.ª) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.ª) \\ (2.ª) \\ (3.ª) + 2 \cdot (2.ª) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en  $A$ .

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.ª) \\ (2.ª) - 2 \cdot (1.ª) \\ (3.ª) - 3 \cdot (1.ª) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.ª) \\ (2.ª) \\ (3.ª) - (2.ª) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en  $B$ .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \\ (4.^a) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en  $C$ .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 4$$

Las cuatro columnas de  $D$  son linealmente independientes.

**11** Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro  $m$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -m \\ 4 & 10 & m^2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 2m & m-1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & m^2 - 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

$$\bullet A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & m-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

Si  $m \neq -1 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

Si  $m = -1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

$$\bullet B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -m \\ 4 & 10 & m^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -m-2 \\ 0 & 6 & m^2-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -m-2 \\ 0 & 0 & m^2-m-6 \end{pmatrix}$$

$$m^2 - m - 6 = 0 \rightarrow m = 3, m = -2$$

Si  $m \neq 3$  y  $m \neq -2 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$

$$\text{Si } m = 3, \text{ la matriz transformada es } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$\text{Si } m = -2, \text{ la matriz transformada es } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$\bullet C = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 2m & m-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 0 & -m-3 \end{pmatrix}$$

Si  $m = 0$ , obtenemos  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 1$

Si  $m = -1$ , obtenemos  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 2$

Si  $m = -3$ , obtenemos  $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 1$

En cualquier otro caso,  $\text{ran}(C) = 2$ .

Es decir: si  $m = 0$  o  $m = -3$ ,  $\text{ran}(C) = 1$  y si  $m \neq 0$  o  $m \neq -3$ ,  $\text{ran}(C) = 2$ .

$$\bullet D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m^2+1 \end{pmatrix}$$

La tercera fila nunca es una fila de ceros.

Si  $m \neq 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 3$

Si  $m = 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 2$

$$\bullet E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2m-1 & -2m+1 \end{pmatrix}$$

Si  $m \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(E) = 2$

Si  $m = \frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(E) = 1$

$$\bullet \text{ Si } m \neq 0 \rightarrow F = \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1/m) \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & m - \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

Miramos las filas.

Si  $m - 2 = 0 \rightarrow m = 2 \rightarrow \text{ran}(F) = 2$

Si  $m - \frac{1}{m} = 0 \rightarrow m = -1, m = 1 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } m = 1 \rightarrow \text{ran}(F) = 2 \\ \text{Si } m = -1 \rightarrow \text{ran}(F) = 2 \end{cases}$

Si  $m = 0 \rightarrow F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(F) = 3$

Resumiendo:

Si  $m \neq 2, m \neq 1$  y  $m \neq -1 \rightarrow \text{ran}(F) = 3$

Si  $m = 2, m = 1$  o  $m = -1 \rightarrow \text{ran}(F) = 2$

Página 76

■ Ecuaciones con matrices

**12** Calcula  $X$  tal que  $X - B^2 = A \cdot B$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**13** Resuelve el siguiente sistema dado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } 4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{-5}{4}; y = \frac{-7}{4}$$

**14** Halla dos matrices  $A$  y  $B$  tales que:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \quad -A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-2A + 10B = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 10 & 26 \end{pmatrix} \quad (\text{Hemos multiplicado por 2 la 2.ª ecuación.})$$

$$13B = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 13 & 39 \end{pmatrix} \quad (\text{Hemos sumado miembro a miembro.})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{Hemos multiplicado por } \frac{1}{13}.)$$

Despejamos  $A$  en la 2.ª ecuación:

$$A = 5B - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 20 & 5 & -10 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



**15** Dadas las matrices  $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ , halla dos matrices  $X$  e  $Y$  que verifiquen estas condiciones:

$$X - 2M = 3N$$

$$M + N - Y = I$$

$$X = 3N + 2M = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Y = M + N - I = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**16** Calcula una matriz  $X$  que conmute con la matriz  $A$ , esto es,  $A \cdot X = X \cdot A$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$A \cdot X = X \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} c=0 \\ a=d \\ c=0 \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

**17** Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula  $B^{-1}$  por el método de Gauss.

b) Halla  $X$  tal que  $BX - A = C^t$ .

c) Determina la dimensión de una matriz  $M$  para poder calcular  $AMC$ .

d) ¿Cuál debe ser la dimensión de  $N$  para que  $C^t N$  sea una matriz cuadrada?

$$\text{a) } B = \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)/2 \\ (2.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } BX - A = C^t \rightarrow BX = C^t + A \rightarrow X = B^{-1}(C^t + A)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A_{(2 \times 3)} M_{(m \times n)} C_{(3 \times 2)}$$

$M$  debe tener dimensión  $3 \times 3$ .

$$\text{d) } C^t_{(2 \times 3)} N_{(m \times n)} = M_{(2 \times 2)}$$

$N$  debe tener dimensión  $3 \times 2$ .

**18** Sea la siguiente ecuación matricial  $AX - B + C = 0$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula  $A^{-1}$  aplicando la definición.

b) Resuelve la ecuación.

a)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4a+c & 4b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4a+c=1 \\ 4b+d=0 \\ -a=0 \\ -b=1 \end{array} \right\} \rightarrow a=0, b=-1, c=1, d=4 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b)  $AX - B + C = 0 \rightarrow AX = B - C \rightarrow X = A^{-1}(B - C)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

**19** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ :

a) Calcula  $A^{-1}$ .

b) Halla la matriz  $X$  que verifique  $AX + 2A = I$ .

a)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)  $AX + 2A = I \rightarrow AX = I - 2A \rightarrow X = A^{-1}(I - 2A)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**20** Sean  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a) Despeja la matriz  $X$  en la ecuación  $XA - B = XC$ .

b) Calcula  $X$ .

a)  $XA - B = XC \rightarrow XA - XC = B \rightarrow X(A - C) = B \rightarrow X = B(A - C)^{-1}$

b)  $X = B(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)/(-2) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

**21** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$ :

a) Calcula las matrices  $X$  e  $Y$  que verifiquen  $2X - Y = A$  y  $X - 3Y = B$ .

b) Halla la matriz  $Z$  tal que  $B + ZA - B^t = 3I$  donde  $I$  es la matriz unidad de orden 2.

$$\text{a) } \begin{cases} 2X - Y = A \\ X - 3Y = B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1.\text{a}) \\ -2 \cdot (2.\text{a})}} \begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ -2X + 6Y = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 18 & -10 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumamos:

$$5Y = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 18 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow 5Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos  $X$  en la segunda ecuación:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución son  $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

b) Despejamos  $Z$  de la ecuación:

$$ZA = 3I + B^t - B$$

Se podrá despejar  $Z$  si  $A$  se puede invertir.

$$\det(A) = 1 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = \left[ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 34 & 21 \end{pmatrix}$$

**22** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ .

a) Calcula  $A^2$ .

b) Determina  $x$  e  $y$  para que  $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & -x - y \\ x + y & y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x^2 - 1 & -x - y \\ x + y & y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 1 \\ -x - y = -2 \\ x + y = 2 \\ y^2 - 1 = -1 \end{cases} \rightarrow y = 0, x = 2$$

## Para resolver

**23** Dadas las matrices  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ :

a) ¿Para qué valores de  $m$  existe  $B^{-1}$ ? Para  $m = 1$ , calcula  $B^{-1}$ .

b) Para  $m = 1$  halla la matriz  $X$  tal que  $X \cdot B + C = D$ .

a) Calculamos la inversa de  $B$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Podemos conseguir  $I$  a la izquierda solo si  $m \neq 0$ , luego existe  $B^{-1}$  si  $m \neq 0$ .

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)/m \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/m & 1/m \end{array} \right)$$

Calculamos  $B^{-1}$  para  $m = 1$ :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)  $X \cdot B + C = D \rightarrow X \cdot B = D - C \rightarrow X = (D - C)B^{-1}$

$$X = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

**24** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$  e  $I$  (matriz unidad de orden 3):

a) Calcula las matrices  $(A - I)^2$  y  $A(A - I)$ .

b) Justifica que la matriz  $A$  es invertible.

c) Comprueba que no existe la matriz inversa de  $A - I$ .

d) Determina el valor del parámetro real  $\lambda$  para que se verifique  $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$ .

$$a) A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

b) En el apartado anterior hemos visto que:

$$A - I = A(A - I) \rightarrow A - I = A^2 - A \rightarrow -A^2 + 2A = I \rightarrow A(-A + 2I) = I$$

Por lo tanto,  $A$  es invertible y su inversa es  $(-A + 2I)$ .

c) Llamamos  $B = A - I$ .

$$B^2 = \mathbf{0}$$

Si  $B$  fuera invertible,  $B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \cdot B^{-1} = \mathbf{0}$

Además, cualquier matriz cumple que  $B^2 \cdot B^{-1} = B \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot I = B$

Tendríamos entonces que  $\left. \begin{array}{l} B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \\ B^2 \cdot B^{-1} = B \end{array} \right\} \rightarrow B = \mathbf{0}$ , lo cual es falso.

Por tanto,  $B = A - I$  no es invertible.

d) Según el resultado del apartado b),  $A^{-1} = -(A - 2I)$ .

Por tanto,  $\lambda = -1$ .

**25** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , halla la matriz  $X$  tal que  $XA + A^t = 2I$ .

$$XA + A^t = 2I \rightarrow XA = 2I - A^t \rightarrow X = (2I - A^t)A^{-1}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[ 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Página 77

**26** Calcula  $A^n$  y  $B^n$  siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Lo probamos por inducción:}$$

Acabamos de comprobar que para  $n = 2$  (primer caso relevante), funciona.

Suponemos que es cierto para  $n - 1$ :

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para  $n = 2$  se cumple.

Suponemos que es cierto para  $n - 1$ :

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

**27** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ , calcula  $A^2, A^3, \dots, A^{128}$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**28** Determina, si es posible, un valor de  $k$  para que la matriz  $(A - kI)^2$  sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k=1$$

**29** Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro  $k$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 3 \text{ para cualquier valor de } k$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 + 2k = 0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

• Si  $k = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(N) = 2$

• Si  $k \neq -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(N) = 3$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (3.^a) : 4 \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

• Si  $k = -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 1$

• Si  $k \neq -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

• Si  $k = 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 2$

• Si  $k \neq 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 3$

**30** Calcula una matriz  $X$  que conmute con la matriz  $A$ , esto es,  $A \cdot X = X \cdot A$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Después, calcula  $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$ .

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{array} \right\} \begin{array}{l} c=0 \\ d=a \\ c=0 \end{array} \left. \right\} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con  $A$ ).

**31** Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Determina la matriz  $X$  que verifica  $AXA = 2BA$ .

$$AXA = 2BA \rightarrow X = A^{-1}(2BA)A^{-1} \rightarrow X = 2A^{-1}B$$

Calculamos  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a)/2 \\ (-1) \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$$

**32** Sean  $A$  y  $B$  las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para que se verifique  $A \cdot B = B \cdot A$ .

b) Para  $a = b = c = 1$ , calcula  $B^{10}$ .

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que  $A \cdot B = B \cdot A$ , debe cumplirse que:

$$\left. \begin{array}{l} 5a+2c=5a+2b \\ 5b+2c=2a+5b \\ 2a+5c=7c \\ 2b+5c=7c \end{array} \right\} \begin{array}{l} c=b \\ c=a \\ 7c=7c \\ 7c=7c \end{array} \quad a=b=c$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, } B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**33** Una matriz cuadrada se llama ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta.

Calcula  $x$  e  $y$  para que esta matriz  $A$  sea ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $A^{-1} = A^t$ , ha de ser  $A \cdot A^t = I$ ; entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25+x^2 & (3/5)y-(3/5)x & 0 \\ (3/5)y-(3/5)x & y^2+9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\left. \begin{array}{l} \frac{9}{25} + x^2 = 1 \\ \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}x = 0 \\ y^2 + \frac{9}{25} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 = \frac{16}{25} \\ y = x \\ y^2 = \frac{16}{25} \end{array} \left. \begin{array}{l} x = \pm \frac{4}{5} \\ y = x \end{array} \right\}$$

Hay dos soluciones:  $x_1 = \frac{4}{5}$ ,  $y_1 = \frac{4}{5}$ ;  $x_2 = -\frac{4}{5}$ ,  $y_2 = -\frac{4}{5}$

**34** Halla todas las matrices  $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , que satisfacen la ecuación matricial  $X^2 = 2X$ .

$$X^2 = 2X \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^2 = 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b(a+c) & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 2a \\ b(a+c) = 2b \\ c^2 = 2c \end{array} \right\} \text{En función de las soluciones de este sistema, obtenemos distintas matrices } X \text{ solución:}$$

$$a = 0, c = 2 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

$$a = 2, c = 0 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 0, c = 0, b = 0 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 2, c = 2, b = 0 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**35** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ , halla la matriz  $X$  que verifica la siguiente

relación:  $XC + A = C + A^2$

$$XC + A = C + A^2 \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \rightarrow A^2 - A = \mathbf{0}$$

$$X = (C + A^2 - A)C^{-1} = CC^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**36** Halla la matriz  $X$  que verifica  $AX + B = 3X$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

$$AX + B = 3X \rightarrow AX - 3X = -B \rightarrow (A - 3I)X = -B \rightarrow X = (A - 3I)^{-1}(-B)$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos  $(A - 3I)^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^{\circ}) \\ 3 \cdot (2.^{\circ}) + (1.^{\circ}) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 10 \cdot (1.^{\circ}) - (2.^{\circ}) \\ (2.^{\circ}) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -30 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^{\circ})/(-30) \\ (2.^{\circ})/(-10) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/10 & 1/10 \\ 0 & 1 & -1/10 & -3/10 \end{array} \right) \rightarrow (A - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - 3I)^{-1}(-B) = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 7/5 \end{pmatrix}$$

**37 a)** Despeja la matriz  $X$  en la siguiente igualdad:  $AXA + B = B(2A + I)$

**b)** Calcula la matriz  $X$  en el caso de que  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

a)  $AXA + B = B(2A + I) \rightarrow AXA = B \cdot 2A + B - B = 2BA \rightarrow$

$$\rightarrow AX = 2BAA^{-1} = 2B \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2B = 2A^{-1}B$$

b) Calculamos  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

**38** Una empresa conservera elabora tres tipos de latas de cangrejo  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ . Para ello necesita hojalata, cangrejo, aceite y sal. Dos almacenes se encargan de distribuir el producto a las tiendas. Considera las siguientes matrices:

**A:** Demanda de los almacenes

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix}$$

**B:** Cantidad de material en gramos por lata

$$B = \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix}$$

El coste, en euros, de cada gramo de material es 0,01 la hojalata; 0,05 el cangrejo; 0,04 el aceite y 0,001 la sal.

**a)** Escribe la matriz de costes  $C$ , de forma que puedas multiplicarla por la matriz de materiales.

**b)** Calcula e interpreta  $AB$ ,  $BC$  y  $ABC$ .

a)  $C = \begin{matrix} \text{Hoj.} \\ \text{Can.} \\ \text{Ac.} \\ \text{Sal} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,001 \end{pmatrix}$

b)  $AB = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44\,750 & 19\,000 & 34\,250 & 5\,500 \\ 46\,300 & 20\,100 & 36\,000 & 5\,950 \end{pmatrix}$

La matriz que hemos obtenido,  $AB$ , expresa, por filas, la cantidad, en gramos, de cada uno de los materiales necesarios para fabricar todas las latas que demandan los almacenes.

$$BC = \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,41 \\ 7,115 \\ 6,06 \end{pmatrix}$$

La matriz  $BC$  representa el coste de los materiales utilizados en una unidad de cada tipo de lata  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ .

$$ABC = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,773 \\ 2\,913,95 \end{pmatrix}$$

Este último producto de matrices,  $ABC$ , nos indica el coste, en materiales de fabricación, de todas las latas que demanda cada uno de los dos almacenes.

**39** En un edificio residencial hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 ventanas grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

$$\begin{matrix} \text{a)} & & \begin{matrix} \text{P} & \text{G} \\ \text{L3} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{L4} & \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{L5} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} & ; & \begin{matrix} \text{C} & \text{B} \\ \text{P} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{G} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{b)} & & \begin{matrix} \text{P} & \text{G} \\ \text{L3} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{L4} & \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{L5} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} & ; & \begin{matrix} \text{C} & \text{B} \\ \text{P} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{G} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{C} & \text{B} \\ \text{L3} & \begin{pmatrix} 20 & 34 \end{pmatrix} \\ \text{L4} & \begin{pmatrix} 26 & 44 \end{pmatrix} \\ \text{L5} & \begin{pmatrix} 32 & 54 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

**Página 78**

**40** La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R, S por unidad de peso:

$$\begin{matrix} & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \text{P} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Q} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{R} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{S} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos, de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de C. ¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?

b) Obtén, en función de la cantidad de Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos. ¿Entre qué valores habría de estar la cantidad de producto Q?

a) Llamamos  $D$  a la matriz que indica las cantidades que queremos tomar de cada vitamina:

$$\begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ D = & \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Llamamos  $X$  a las cantidades que debemos tomar de cada alimento:

$$\begin{matrix} \text{P} & \text{Q} & \text{R} & \text{S} \\ X = & \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Llamamos  $M$  a la matriz que indica la cantidad de vitaminas por producto:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El producto  $XM$  indica la cantidad de vitaminas que hemos tomado, luego  $XM = D$ .

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + y + 2z + t & 2x + z + t & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

Obtenemos un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z + t = 20 \\ 2x + \quad z + t = 25 \\ 2y + \quad t = 6 \end{array} \right\} x = 11 - \frac{1}{2}\lambda, y = 3 - \frac{1}{2}\lambda, z = 3, t = \lambda$$

Es un sistema compatible indeterminado, luego sí es posible hacerlo y hay infinitas formas de conseguirlo.

b) Si hacemos  $y = \lambda$ , obtenemos:  $x = \lambda, y = \lambda, z = 3, t = 6 - 2\lambda$ .

Como las cantidades no pueden ser negativas, ha de ser  $0 \leq \lambda \leq 3$ .

**41 a) Comprueba que si  $A$  es una matriz cuadrada tal que  $A^2 = 2A - I$ , donde  $I$  es la matriz identidad, entonces  $A$  es invertible. ¿Cuál es la expresión de  $A^{-1}$ ?**

**b) Utiliza el apartado anterior para calcular la inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ .**

a)  $A^2 = 2A - I \rightarrow A^2 - 2A = -I \rightarrow -A^2 + 2A = I \rightarrow A(-A + 2I) = I$

Por tanto,  $A$  es invertible y  $A^{-1} = -A + 2I$ .

b) Comprobamos que  $A^2 = 2A - I$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Puesto que  $A^2 = 2A - I$ , por el apartado anterior,  $A$  es invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = -A + 2I = - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

**42 Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , halla una matriz  $X$  que verifique la ecuación  $XA + A = A^{-1}$ .**

$$XA + A = A^{-1} \rightarrow XA = A^{-1} - A \rightarrow X = (A^{-1} - A)A^{-1} = (A^{-1})^2 - I$$

De otra forma:

$$(X + I)A = A^{-1} \rightarrow (X + I) = (A^{-1})^2 \rightarrow X = (A^{-1})^2 - I$$

Calculamos  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$X = (A^{-1})^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## Cuestiones teóricas

**43** Justifica por qué no es cierta la igualdad:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

cuando  $A$  y  $B$  son dos matrices cualesquiera.

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser  $AB = BA$ ; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

**44** Sea  $A$  una matriz de dimensión  $2 \times 3$ .

a) ¿Existe una matriz  $B$  tal que  $A \cdot B$  sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para  $B \cdot A$ ?

Pon un ejemplo para cada caso.

a) No;  $A \cdot B$  tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , tenemos que:  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión  $1 \times 2$  (ha de tener dos columnas para poder multiplicar  $B \cdot A$ ), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = (1 \ 2), \text{ entonces } B \cdot A = (5 \ 2 \ 0).$$

**45** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas de igual orden. Si  $A$  y  $B$  son simétricas, ¿lo es también su producto  $A \cdot B$ ?

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si  $A$  y  $B$  son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto,  $A \cdot B$ , no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ no es simétrica.}$$

**46** ¿Es posible encontrar una matriz  $A$  no nula tal que  $A^2$  sea la matriz nula?

En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**47** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ , prueba que se verifica  $A^3 + I = 0$  y utiliza esta igualdad para obtener  $A^{10}$ .

\* Haz  $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$  y ten en cuenta que  $A^3 = -I$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos  $A^{10}$  (teniendo en cuenta que  $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$ ):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

**48** Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden 3 tal que  $a_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  ( $A$  es una matriz diagonal). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ su producto es } A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix},$$

que también es una matriz diagonal.

**49** Definimos la *traza* de una matriz cuadrada  $A$  de orden 2 como  $tr(A) = a_{11} + a_{22}$ . Prueba que si  $A$  y  $B$  son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces  $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$ .

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ entonces:}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Por tanto,  $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$ .

**50** ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta y pon ejemplos.

a) Si  $A$  es una matriz  $2 \times 2$  cuyo rango es 2, su rango no varía si le añadimos una fila o una columna.

b) Si  $X - AX = B$  entonces  $X = (I - A)^{-1}B$ .

c) Si  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$  entonces  $(A + I)^2 = 6I$ .

d) Si  $AB = BA$  entonces  $(AB)^t = (BA)^t$ .

e) Si a una matriz de 3 filas y 3 columnas cuyo rango es 3 le quitamos una fila y una columna, entonces su rango será 2.

f) En una matriz antisimétrica ( $A^t = -A$ ), los elementos de la diagonal principal son todos 0.

g) El rango de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2 - 1 \end{pmatrix}$  es 3 si  $k = 0$ .

h) Si  $A$  es una matriz regular y  $(B - C)A = 0$  (matriz nula), podemos asegurar que  $B = C$ .

a) Verdadero. No varía, puesto que la matriz que obtenemos tiene, como máximo, dos filas o dos columnas, luego su rango no puede ser mayor que dos. Por otra parte, como la nueva matriz contiene a  $A$ , el rango tiene que ser  $\geq 2$ , es decir, el rango de la nueva matriz es 2.

b) Verdadero.  $X - AX = B \rightarrow (I - A)X = B$ . Multiplicando por  $(I - A)^{-1}$  a la izquierda, tenemos la expresión final para calcular  $X$ .

c) Verdadero.  $(A + I)^2 = \left[ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I$

d) Verdadero.  $AB = BA$ . Como las dos matrices,  $AB$  y  $BA$ , son la misma, su traspuesta también será igual.

e) Falso. Por ejemplo,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  tiene rango 3. Si quitamos la última fila y la última columna,

obtenemos  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , que tiene rango 1.

f) Verdadero, porque  $a_{ii} = -a_{ii} \rightarrow 2a_{ii} = 0 \rightarrow a_{ii} = 0$ .

$$g) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 4 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -5 & -10 & k^2 - 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 - 6 \end{pmatrix}$$

La afirmación es falsa, pues para que  $\text{ran}(M) = 3$ , debe ser  $k \neq \pm \sqrt{6}$ .

h) Verdadero. Como  $A$  es regular, podemos multiplicar por  $A^{-1}$  a la derecha:

$$(B - C)AA^{-1} = \mathbf{0}A^{-1} \rightarrow B - C = \mathbf{0} \rightarrow B = C$$

## Para profundizar

**51** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad  $A \cdot B = A \cdot C$  no puede deducirse, en general, que  $B = C$ .

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices  $B$  y  $C$  distintas tales que  $A \cdot B = A \cdot C$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz  $A$  para que de  $A \cdot B = A \cdot C$  se pueda deducir que  $B = C$ ?

a) Por ejemplo, si  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , entonces  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C$ , pero  $B \neq C$ .

b) Debe existir  $A^{-1}$ .

**52** a) Si  $A$  es una matriz regular de orden  $n$  y existe una matriz  $B$  tal que  $AB + BA = \mathbf{0}$ , probar que  $BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$ .

b) Si  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ , halla una matriz  $B \neq \mathbf{0}$  tal que  $AB + BA = \mathbf{0}$ .

a) Multiplicamos por  $A^{-1}$  por la izquierda en la igualdad:

$$AB + BA = \mathbf{0} \rightarrow A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \rightarrow B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por  $A^{-1}$  por la derecha:

$$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \rightarrow BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$$

b) Si  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \\ 2b - c + 3d = 0 \end{array} \rightarrow d = -a$$

$$2b - c + 3d = 0 \rightarrow 3a - 2b + c = 0 \rightarrow c = -3a + 2b$$

Por tanto:  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$ ,  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$

Por ejemplo, con  $a = 1$  y  $b = 1$ , queda  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Página 79

**53** Despeja la matriz  $X$  en la igualdad  $(X+A)^2 = X^2 + XA + I_2$  y obtén  $X$  en el caso  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} (X+A)^2 &= X^2 + XA + I \rightarrow (X+A)(X+A) = X^2 + XA + I \rightarrow \\ &\rightarrow X^2 + XA + AX + A^2 = X^2 + XA + I \rightarrow \\ &\rightarrow AX + A^2 = I \rightarrow AX = I - A^2 \rightarrow X = A^{-1}(I - A^2) \end{aligned}$$

Calculamos  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)/2}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(I - A^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**54** Demuestra que si  $A$  es una matriz regular, al despejar  $X$  en la ecuación  $XA^2 + BA = A^2$  se obtiene  $X = I - BA^{-1}$ .

$$XA^2 + BA = A^2 \rightarrow XA^2 - A^2 = -BA \rightarrow (X-I)A^2 = -BA$$

Multiplicamos por  $A^{-1}$  a la derecha ( $A^{-1}$  existe por ser  $A$  regular):

$$(X-I)A = -B \rightarrow X-I = -BA^{-1} \rightarrow X = -BA^{-1} + I \rightarrow X = I - BA^{-1}$$

**55** Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de  $I$  y de  $-I$ , cuya inversa coincida con su traspuesta.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = A^t \rightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t \rightarrow I = A \cdot A^t$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Buscamos matrices que verifiquen estas condiciones. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que  $A^{-1} = A^t$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a)}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$



**56** Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. A \text{ es antisimétrica si } A^t = -A.$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-c \\ d=0 \end{cases}$$

$$A \text{ debe ser de la forma } A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

**57** Una matriz cuadrada es *mágica de suma k* cuando la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a *k*. ¿Cuánto vale *k* si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

- Hemos visto en el ejercicio anterior que, en una *matriz antisimétrica*, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es *antisimétrica*,  $k = 0$ .
- Buscamos las matrices *mágicas antisimétricas de orden 3*: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

Veamos cómo es una *matriz antisimétrica de orden 3*:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

*A* será *antisimétrica* si  $A^t = -A$ ; es decir:

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a=-a & b=-d & c=-g \\ d=-b & e=-e & f=-h \\ g=-c & h=-f & i=-i \end{cases}$$

$$\text{Luego, una matriz } \textit{antisimétrica de orden 3} \text{ es de la forma: } A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$$

Para que *A* sea *mágica*, ha de tenerse que:

$$\left. \begin{matrix} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} -b + c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{matrix}, \text{ es decir: } \begin{cases} c = -b \\ f = b \end{cases}$$

Por tanto, las *matrices mágicas antisimétricas de orden 3* son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

**58** Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$  en las que consideramos *x* e *y* como incógnitas, y *a* un parámetro.

Estudia las soluciones de la ecuación  $AB - C = D$  en función del parámetro *a* y encuentra las soluciones en los casos  $a = 2$  y  $a = 1$ .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}}_B - \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}}_D \rightarrow \begin{pmatrix} ax + y \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} ax = 6 - ay \\ y - ay = 1 - a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax + ay = 6 \\ (1-a)y = 1-a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(x+y) = 6 \\ (1-a)y = 1-a \end{cases}$$

- Si  $a = 0$ , el sistema es *incompatible*, pues la primera ecuación sería  $0 = 6$ .
- Si  $a = 1$ , el sistema es *compatible indeterminado*, pues quedaría:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

En este caso la solución sería:  $x = 6 - \lambda$ ,  $y = \lambda$ .

- Si  $a \neq 0$  y  $a \neq 1$ , el sistema es compatible determinado, pues quedaría:

$$\begin{cases} x + y = \frac{6}{a} \rightarrow x = \frac{6}{a} - 1 \\ y = \frac{1-a}{1-a} = 1 \end{cases}$$

Su solución sería:  $x = \frac{6}{a} - 1$ ,  $y = 1$ .

Concretamente, para  $a = 2$  la solución es:  $x = 2$ ,  $y = 1$ .

**59** Sea  $A$  una matriz cuadrada que verifica  $A^2 - 2A = 3I$ .

a) Demuestra que  $A$  es invertible y expresa  $A^{-1}$  en función de  $A$  e  $I$ .

b) Expresa  $A^3$  como combinación lineal de  $A$  e  $I$ .

c) Halla todas las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$  que verifican  $A^2 - 2A = 3I$ .

a)  $A^2 - 2A = 3I \rightarrow A(A - 2I) = 3I \rightarrow A \cdot \frac{1}{3}(A - 2I) = I$

Por tanto,  $A$  es invertible y su inversa es  $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$ .

b)  $A^2 = 3I + 2A$

$$A^3 = (3I + 2A)A = 3A + 2A^2 = 3A + 2(3I + 2A) = 7A + 6I$$

c)  $\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}_A - 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}_A = 3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_I \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 - 2a = 3 \\ d^2 - 2d = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - 2a - 3 = 0 \rightarrow a_1 = 3, a_2 = -1 \\ d^2 - 2d - 3 = 0 \rightarrow d_1 = 3, d_2 = -1 \end{cases}$$

Las matrices pedidas son  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**60** Estudia para qué valores de  $x$ , la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$  coincide con su opuesta.

$$A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \rightarrow -A = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$$

Si  $-A = A^{-1} \rightarrow A(-A) = I$

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - x^2 & 0 \\ 0 & 10 - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Autoevaluación

### Página 79

1 Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro  $a$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \rightarrow (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \rightarrow (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (a+1) \cdot (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 3-a \end{pmatrix}$$

Si  $a = 3 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

Si  $a \neq 3 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

2 Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden 3,  $C$  una matriz de dimensión  $3 \times 2$  y  $D$  una matriz cuadrada de orden 2, ¿qué dimensión debe tener la matriz  $B$  para que la ecuación matricial  $AB = CD$  tenga sentido?

$$A_{(3 \times 3)} B_{(m \times n)} = C_{(3 \times 2)} D_{(2 \times 2)} = M_{(3 \times 2)}$$

Luego  $B$  debe ser una matriz de dimensión  $3 \times 2$ .

3 Determina  $a$  y  $b$  de forma que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$  verifique  $A^2 = A$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \rightarrow \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4-a=2 \rightarrow a=2 \\ -2-b=-1 \rightarrow b=-1 \\ 2a+ab=a \rightarrow 4-2=2 \\ -a+b^2=b \rightarrow -2+1=-1 \end{cases}$$

Por tanto,  $a = 2$  y  $b = -1$ .

4 Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ , calcula  $A^n$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$$

**5** Determina todas las matrices  $A$  tales que  $AX = XA$ , siendo  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b = a+c \\ a+b = b+d \\ c+d = a+c \\ c+d = b+d \end{array} \right\} \rightarrow a = d, b = c$$

Son todas las matrices de la forma  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

**6** Dada la matriz  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , halla dos matrices  $X$  e  $Y$  tales que verifiquen las siguientes ecuaciones:

$$X + Y = C$$

$$X - Y = C^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} X + Y = C \\ + X - Y = C^{-1} \\ \hline 2X = C + C^{-1} \end{array} \rightarrow X = \frac{1}{2}(C + C^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} X + Y = C \\ - X - Y = C^{-1} \\ \hline 2Y = C - C^{-1} \end{array} \rightarrow Y = \frac{1}{2}(C - C^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**7 a)** Halla la inversa de la siguiente matriz:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**b)** Resuelve la ecuación  $2XA + B = A^t$ , siendo  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\text{a) } \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 3 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) + (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 2XA + B = A^t &\rightarrow 2XA = A^t - B \rightarrow 2X = (A^t - B)A^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{2}(A^t - B)A^{-1} \\
 X &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**8** Razona si es posible añadir una fila a esta matriz de forma que la nueva matriz tenga rango 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

Si se añade una fila, puede tener, como máximo, rango 3, luego no es posible que la nueva matriz tenga rango 4.

**9** Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$ .

$$\begin{matrix} & \text{T} & \text{O} \\ M_1 & \begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix} \\ M_2 & \begin{pmatrix} 400 & 250 \end{pmatrix} \\ M_3 & \begin{pmatrix} 250 & 180 \end{pmatrix} \\ M_4 & \begin{pmatrix} 500 & 300 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo  $M_1$ , el 5% en el  $M_2$ , el 8% en el  $M_3$  y el 10% en el  $M_4$ .

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{matrix} & & & & & \text{T} & \text{O} \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_1 & \begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix} \\ D & \begin{pmatrix} 0,02 & 0,05 & 0,08 & 0,1 \end{pmatrix} & M_2 & \begin{pmatrix} 400 & 250 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0,98 & 0,95 & 0,92 & 0,9 \end{pmatrix} & M_3 & \begin{pmatrix} 250 & 180 \end{pmatrix} \\ & & M_4 & \begin{pmatrix} 500 & 300 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & & \text{T} & \text{O} \\ D & \begin{pmatrix} 96 & 60,9 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 1354 & 869,1 \end{pmatrix} \end{matrix} \approx \begin{matrix} & & & & \text{T} & \text{O} \\ D & \begin{pmatrix} 96 & 61 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 1354 & 869 \end{pmatrix} \end{matrix}$$