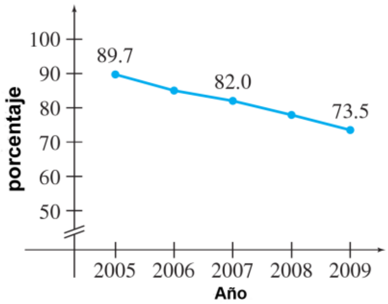
Derivada y sus aplicaciones — Hoja1

1) Hallar la velocidad media de un móvil dotado de un movimiento rectilíneo, según la función $e=4t^2$ (metros, segundos) entre los instantes $t=20\,\text{s}$ y $t=21\,\text{s}$ de su recorrido.

2) Algunos hogares de una ciudad española están sustituyendo sus teléfonos fijos por teléfonos móviles. La siguiente gráfica muestra el porcentaje de hogares de esta ciudad con teléfono fijos entre los años 2005 y 2009. Halla el ritmo medio de cambio en los teléfonos fijos en este periodo de tiempo. ¿Qué significado tiene el resultado obtenido?



3) Aplicando la definición (como límite), halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x)=x^2-1$; $x=3$ b) $f(x)=x^2+x-1$; $x=-2$

c) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$; $x=0$ e) $f(x)=\dfrac{1}{2}x-2$; $x=4$

4) Haciendo uso de la definición de derivada (como límite), halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-x$ b) $g(x)=\dfrac{1}{2x}$

5) El trazado de un tobogán de acuapark tiene la forma de un arco de hipérbola de ecuación $y=\dfrac{8}{x+2}$. Calcula la pendiente del tobogán a 1, 2 y 4 metros de la vertical del lanzamiento.

6) Calcula $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ para las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4+5x^3-2x^2+x-6$ b) $g(x)=3x+\dfrac{2}{x}$

7) Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los valores dados de *x*. En los dos primeros apartados halla además la ecuación de dicha recta tangente:

a) $y=x^4-5x^3+2$; $x=2$

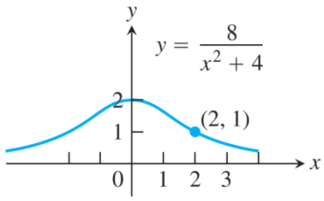
b) $y=-3x^5-8x^3+4x^2$; $x=1$

c) $y=-2x^{1/2}+x^{3/2}$; $x=9$

d) $y=-x^{-3}+x^{-2}$; $x=2$

e) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; $x=0$

8) Halla la pendiente de la recta tangente a la curva de Agnesi (ver la gráfica) en el punto $(2,1)$



9) Encuentra todos los puntos de la gráfica de la función $f(x)=9x^2-8x+4$ donde la pendiente de la recta tangente es 0.

10) Halla todos los puntos de la gráfica de la función $f(x)=x^3+9x^2+19x-10$ donde la pendiente de recta tangente sea -5.

11) En cada una de las siguientes funciones halla los valores de *x* para los cuales la recta tangente es horizontal.

a) $f(x)=2x^3+9x^2-60x+4$

b) $f(x)=x^3+15x^2+63x-10$

c) $f(t)=t^3-5t^2+6t+3$

12) Halla todos los puntos de la gráfica de la función $f(x)=x^3+6x^2+21x+2$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $y=9x-2$.

13) Halla un punto en la gráfica de $y=e^{3x}$ en el cual la recta tangente pase por el origen de coordenadas.

14) Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt[3]{2x-5}$ b) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$

c) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-5}}$ d) $y=\ln 2x$

e) $y=(\ln x)^2$ f) $y=\ln x^3$

g) $y=\ln(2+\sqrt{x})$ h) $y=\ln\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

i) $y=\ln(\ln x)$ j) $y=\ln(x^3-7x^2-3)$

k) $y=x^3\cdot\ln x$ l) $y=\sqrt{\ln x}$

m) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$ n) $y=x^3\cdot\log_2(3-2x)$

ñ) $y=\dfrac{x^2}{1+\ln x}$ o) $y=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$

p) $y=e^{-5x^2}$ q) $y=x^3\cdot e^x$

r) $y=e^{-1/x}$ s) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

t) $y=\dfrac{e^x}{\ln x}$ u) $y=e^{\sqrt{1+x^2}}$

v) $y=e^{(x-e^x)}$ w) $y=\ln\left(1-xe^x\right)$

x) $y=Ae^{2x}-Be^{-4x}$ y) $y=\dfrac{60}{5+7e^{-x}}$

15) Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=t^2-\dfrac{4}{t^3}$ b) $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x}$

c) $y=3x(6x-5x^2)$ d) $y=\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$

e) $y=x^{-2}-2e^x$ f) $y=\sqrt{x}\left(4-x^2\right)$

g) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$ h) $y=x^4\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)$

i) $y=\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ j) $y=\dfrac{e^x}{x+4}$

k) $y=\left(\dfrac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ l) $y=\sqrt[3]{9x^2+4}$

m) $y=\dfrac{-8}{(t+3)^3}$ n) $y=x\sqrt{1-x^2}$

ñ) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ o) $y=\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$

p) $y=(e^t+e^{-t})^3$ q) $y=xe^x-x$

r) $y=e^{-x}\ln x$ s) $y=\ln\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)$

t) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$ u) $y=(3+2x)\cdot e^{-3x}$

v) $y=\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2$ w) $y=\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x-1}\right)$

x) $y=\dfrac{x^5}{(x-1)^5}$ y) $y=2^{x\cdot\ln x}$

z) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

16) Una población de 500 bacterias es introducida en un tubo de ensayo y su número crece de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$P(t)=500\left(1+\frac{4t}{50+t^2}\right)$$

donde t está medido en horas. Hallar el ritmo al cual la población está creciendo en el instante $t=2$.

17) Halla y clasifica los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $y=3x^2-12x+5$ b) $y=x^3-3x+1$

c) $y=2x^2-3x^2-12x+1$ d) $y=x^4-2x^2+3$

e) $y=x^3-6x^2+9x+2$ f) $y=(x^2-1)^3$

g) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ h) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

i) $y=x-\ln x$ j) $y=\ln(x^2+x+1)$

k) $y=e^{-x}-e^{-2x}$ l) $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

m) $y=x(x-1)^3$ n) $y=\dfrac{x^3}{x+2}$

ñ) $y=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{1}{x}$ o) $y=\dfrac{x^4+1}{x^2}$

18) Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) $f(x)=-x^2+4x$ $x=-2$

b) $f(x)=x^3-6x^2+16x-11$ $x=0$

c) $f(x)=1+\ln x$ $x=1$

d) $f(x)=-xe^x$ $x=0$

e) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$ $x=2$

f) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$ $x=0$

19) Estudia el crecimiento de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x)=3x^2-2x+5$ en $x=0$

b) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+9}$ en $x=-2$

c) $f(x)=x^3-6x^2+12$ en $x=4$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$ en $x=-1$

e) $f(x)=\sqrt{4-x}$ en $x=0$

20) Estudiar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $y=x^2-5x+6$ b) $y=4-3x-x^2$

c) $y=(x+2)^3$ d) $y=x^2-5x+6$

e) $y=3x^4-4x^3$ f) $y=x^4-8x^2+16$

g) $y=\dfrac{x^2}{x^2+2}$ h) $y=\dfrac{x}{x^2+2}$

i) $y=\sqrt[3]{x+2}$ j) $y=e^{-x^2/2}$

k) $y=xe^{x^2}$ l) $y=\ln(1+x^2)$

21) Determinar los valores absolutos de la función y los valores de x en que se alcanzan en los siguientes casos:

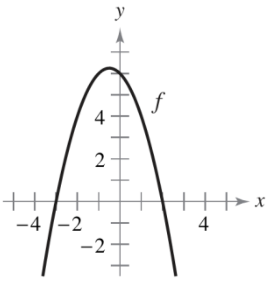
Función	*Intervalo*
a) $f(x)=2(3-x)$	$[-1,2]$
b) $f(x)=\dfrac{2x+5}{3}$	$[0,5]$
c) $f(x)=-x^2+3x$	$[0,3]$
d) $f(x)=x^2+2x-4$	$[-1,1]$
e) $f(x)=x^3-3x^2$	$[-1,3]$
f) $f(x)=x^3-12x$	$[0,4]$
g) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$	$[-1,1]$
h) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$	$[0,1]$

22) Sabiendo que la función $f(x)=ax^2+bx+6$ se anula para $x=1$ y que tiene un mínimo en $x=2$ calcula los coeficiente a y b.

23) La función $f(x)=x^3+bx^2+cx+3$ tiene extremos relativos en $x=1$ y $x=3$.
a) Calcular los valores de b y c.
b) Determina cual es el máximo y cual el mínimo.

24) La función $f(x)=\dfrac{1}{90}\left(-x^2+100x-1600\right)$ representa el beneficio, expresado en miles de euros que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto. Esbozar la gráfica de la función e indicar cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas. Determinar también cuál es el mayor beneficio posible y cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo.

25) Considera una función f cuya gráfica se muestra en la figura. Dibujar la gráfica de las funciones f' y f''.



26) Averigua los puntos en los que la recta tangente a la curva de ecuación $y=\dfrac{4}{x^2+x}$ cumple:

a) Es horizontal.

b) Es paralela a la recta $y=2x+3$.

27) Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles) viene dado por la siguiente expresión (x en años):

$$f(x)=(x-2)^2(1-2x)+252x+116 \qquad 0\le x\le 10$$

a) Determinar los intervalos de tiempo en los que la cartera creció y aquellos en que decreció.
b) El individuo retira sus ingresos transcurridos los 10 años. ¿Cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

28) La función $f(x)=90x^2-0,2x^4$ da el beneficio en euros, que se obtiene por la fabricación de x unidades de un determinado producto.
a) ¿Cuántas unidades de este producto se han de fabricar para obtener un beneficio máximo?
b) ¿Cuál es este beneficio máximo?

29) El coste total en euros de producir x litros de cierto producto viene dado por $C(x)=0,5x^2+5x+800$. Definir la función que determina el **coste medio** por litro producido y determinar de forma razonada con qué producción dicho coste medio será mínimo. ¿Cuál es el valor de dicho coste?

30) Determine donde se alcanza el mínimo de la función $f(x)=3x^2-6x+a$. Calcule el valor de a para que el mínimo de la función sea 5.

31) Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función $f(t)=60t-10t^2$ representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas t que lleva abierto el establecimiento. Se pide:
a) Determinar el número máximo de clientes que van una determinada noche al restaurante. Justificar que es un máximo.
b) Si deseamos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas y no más de 80, ¿entre qué horas tendríamos que ir?

32) Se ha construido una presa de almacenamiento de agua cuyos costes de mantenimiento diarios son una función de la cantidad de agua que la misma tiene almacenada. Tales costes (en euros) vienen dados por la siguiente expresión:

$$C(x)=x^3+x^2-8x+73$$

$C(x)$ representa el coste si el volumen de agua (en millones de metros cúbicos) es x.

a) Encontrar el volumen diario de agua óptimo que debe mantenerse para minimizar costes.
b) Calcular el coste mínimo diario que supone el mantenimiento de la instalación. Si un día la presa tiene almacenados 3 millones de metros cúbicos de agua ¿cuánto se ha gastado de más respecto del coste mínimo?

33) Una empresa introduce un nuevo producto del que se venden $s(t)=200\left(5-\dfrac{9}{2+t}\right)$ unidades, donde t es el tiempo en meses.
a) Calcular el valor medio de $s(t)$ durante el primer año.
b) En qué mes coincide $s'(t)$ con dicho valor medio.

34) La derivada de una función f definida de $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, es:

$$f'(x)=x^2+x-6$$

Determinar, si es posible, para qué valores de x alcanza f su máximo y su mínimo relativos.

35) Realiza un estudio de las siguientes funciones y haz su representación gráfica:

a) $f(x)=x^2-5x+4$
b) $f(x)=x^3-3x+2$
c) $f(x)=x^3-6x^2+9x$
d) $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-3x$
e) $f(x)=3x^4-4x^3$
f) $f(x)=x^4-2x^2$
g) $f(x)=(x-2)^3$
h) $f(x)=(x-1)^2(x+2)$
i) $f(x)=-x^3+3x^2-2$
j) $f(x)=2x^3-3x-10$
k) $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$
l) $f(x)=x^4-6x^2+9$
m) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$
n) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$