RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Página 10

1. UN PROBLEMA MUY ANTIGUO

Los precios de un toro, un cordero y un pollo son 25 PTA, 5 PTA y 0,25 PTA, respectivamente. Se compran 500 animales por 500 PTA.

¿Cuántos se han comprado de cada especie?

- Llamamos:

  n.º de pollos $\rightarrow$ x

  n.º de corderos $\rightarrow$ y

  n.º de toros $\rightarrow$ z

  Tenemos que:

  — Se compran 500 animales $\rightarrow$ $x + y + z = 500$ $\rightarrow$ $x = 500 - y - z$

  — Cuestan 500 PTA $\rightarrow$ $0{,}25x + 5y + 25z = 500$ $\rightarrow$ $x + 20y + 100z = 2\,000$

  Sustituimos x en la 2.ª ecuación:

  $$500 - y - z + 20y + 100z = 2\,000 \quad \rightarrow \quad 19y + 99z = 1\,500 \quad \rightarrow \quad 19y = 1\,500 - 99z$$

- Como x, y, z son números enteros, $1\,500 - 99z$ ha de ser múltiplo de 19. Hagamos una tabla con todas las posibilidades:

z	0	1	2	3	4	5	6	7
$1\,500 - 99z$	1 500	1 401	1 302	1 203	1 104	1 005	906	807
¿Es $\dot{19}$?	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO

z	8	9	10	11	12	13	**14**	15
$1\,500 - 99z$	708	609	510	411	312	213	**114**	15
¿Es $\dot{19}$?	NO	NO	NO	NO	NO	NO	**SÍ**	NO

El único múltiplo de 19 es $114 = 19 \cdot 6$, que corresponde a

$$z = 14 \quad \rightarrow \quad y = 6 \quad \rightarrow \quad x = 500 - 6 - 14 = 480$$

Por tanto, se han comprado 480 pollos, 6 corderos y 14 toros.

2. UN NÚMERO MUY INTERESANTE

El matemático Hardy visitó en el hospital al matemático indio Ramanujan. Le comentó: "He venido en el taxi 1 729, un número muy soso". "De ninguna manera" —contestó Ramanujan—. "Es un número muy interesante: es el menor que se puede expresar como suma de dos cubos de dos maneras diferentes". Demuéstralo.

La raíz cúbica de 1 729 es $\sqrt[3]{1\,729} = 12{,}0023...$

Por tanto, al expresar 1 729 como suma de dos cubos, solo pueden intervenir los cubos de 1 a 12.

$1^3 = 1$
$2^3 = 8$
$3^3 = 27$
$4^3 = 64$
$5^3 = 125$
$6^3 = 216$
$7^3 = 343$
$8^3 = 512$
$9^3 = 729$
$10^3 = 1\,000$
$11^3 = 1\,331$
$12^3 = 1\,728$

Advertimos que $12^3 + 1^3 = 1\,729$.

¿Cuáles son los otros dos cubos que, sumados, dan el número buscado? Observando, vemos que $9^3 + 10^3 = 1\,729$.

Ya hemos comprobado que 1 729 se puede expresar como suma de dos cubos naturales de dos formas distintas.

Para ver que es el menor número que cumple esta propiedad, tanteamos con los cubos del 1 al 11 y comprobamos que no se puede obtener el mismo número mediante dos sumas distintas.

3. DÍAS DEL AÑO

Demuestra que el número 365 es el único que es suma de los cuadrados de tres números consecutivos y, también, suma de los cuadrados de los dos siguientes.

Empezamos tanteando:

La mitad del número es 182,5. Su raíz cuadrada es $\sqrt{182{,}5} = 13{,}5...$

Por tanto, suponemos que los dos números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365 son 13 y 14. Lo comprobamos: $13^2 + 14^2 = 365$.

Pues bien, los tres anteriores, 10, 11 y 12, cumplen que la suma de sus cuadrados es, también, 365:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$$

¿Es 365 el único que cumple esto? Si nos vamos hacia atrás, $9^2 + 10^2 + 11^2 < 12^2 + 13^2$ y cuanto más hacia atrás nos vayamos, más pequeños son los cuadrados de los tres menores en comparación con los cuadrados de los dos siguientes.

Y, al revés, si nos vamos hacia adelante,

$$11^2 + 12^2 + 13^2 > 14^2 + 15^2$$

y cuanto mayores los tomemos, mayor ventaja sacan los cuadrados de los tres menores a los de los dos mayores.

Por tanto, 365 es el único.

Otra resolución

El problema se resuelve muy fácilmente por álgebra:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2$$

Operando y simplificando se llega a $n^2 - 8n - 20 = 0 \begin{cases} n = -2 \\ n = 10 \end{cases}$

Solución: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

Otra solución: $(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, evidentemente.

Si no nos gusta esta otra solución ("el 5 es, también, un número que se puede obtener sumando los cuadrados de tres números consecutivos o bien los cuadrados de los dos siguientes"), en el enunciado deberíamos poner "...tres números *naturales* consecutivos...".

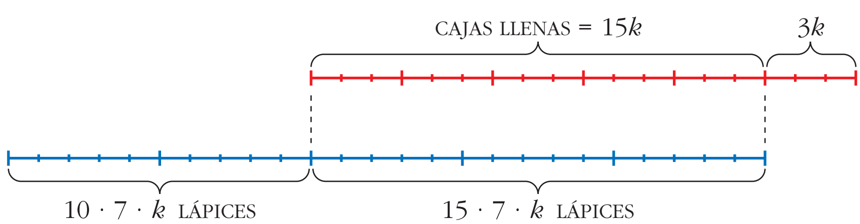
Página 11

4. EMPAQUETANDO LÁPICES

Disponemos de un número de lápices comprendido entre 300 y 400, y de un cierto número de cajas. En cada caja caben 7 lápices.

En un cierto momento hemos llenado las 5/6 partes de las cajas con las 3/5 partes de los lápices.

¿Cuántas cajas más necesitamos para que se puedan guardar todos los lápices?



El número de lápices es $15 \cdot 7 \cdot k + 10 \cdot 7 \cdot k = 175k$ en total.

Como sabemos que está comprendido entre 300 y 400, habrá $175 \cdot 2 = 350$ lápices.

Así, $k = 2$.

Grupos de 7 lápices que quedan sin empaquetar: $10k = 20$

Cajas que quedan vacías: $3k = 6$

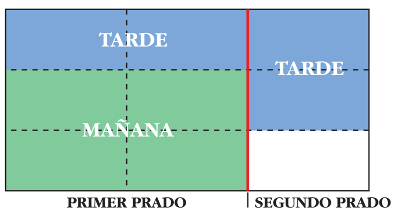
Por tanto, $20 - 6 = 14$ cajas que faltan.

5. CUADRILLA DE SEGADORES

Una cuadrilla de segadores ha de segar dos prados. Uno tiene doble superficie que el otro.

Durante medio día trabajan todos en el grande. El resto del día trabaja la mitad en el grande y la otra mitad en el pequeño. Al día siguiente, lo que quedaba del prado pequeño lo segó un único trabajador en jornada completa.

¿Cuántos segadores tiene la cuadrilla?



Observando el esquema, deducimos que 1 trabajador siega 1/9 del total en una jornada.

Es decir, 1/18 del total en media jornada.

Así, deducimos que, en total, son 8 segadores (pues la 1.ª mañana segaron entre todos $\frac{4}{9}$; es decir $\frac{8}{18}$ del total).

Página 12

6. GOLEADA

¿De cuántas formas se puede llegar al resultado 5-0? ¿De cuántas al resultado 4-1? Por tanto, ¿de cuántas a 5-1?

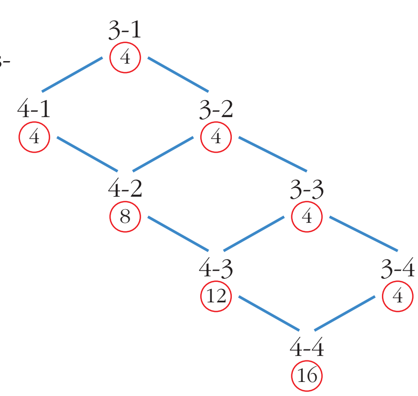
Al resultado 5-0 se podrá llegar de 1 forma. Al 4-1, de 5 formas. Por tanto, al 5-1 de 1 + 5 = 6 formas.

7. CAMINO DEL EMPATE

Si además de saber que el partido terminó 4-4, sabemos que pasó por 3-1, ¿de cuántas formas pudo evolucionar el resultado?

El esquema ahora sería así:

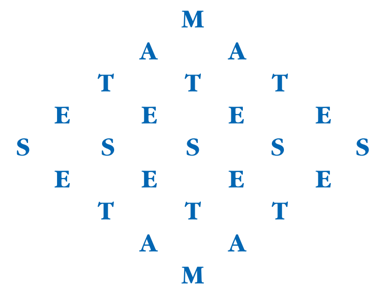
El resultado pudo evolucionar de 16 formas distintas.



Página 13

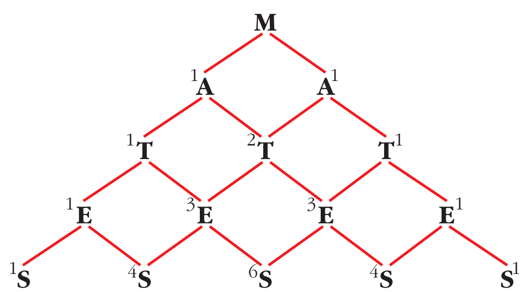
8. MUCHAS MATES

¿De cuántas formas se puede formar la palabra MATES uniendo letras contiguas en la figura de la derecha?



Consideramos la mitad de la figura.

Veamos de cuántas formas se puede llegar a la **S**, formando la palabra MATES. Los números puestos al lado de cada letra indican las formas de llegar a ella.



Sumamos las posibilidades:

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 \text{ formas}$$

Multiplicamos por 2 para considerar la otra mitad de la figura.

Por tanto, hay 32 maneras de formar la palabra MATES en la figura dada.

9. LLEGAR A UN 8-0

En un partido de baloncesto se va por el resultado 8-0. Si sabemos que no se ha marcado ningún triple, ¿de cuántas formas se ha podido llegar a ese resultado? (Comprueba que son 34).

Baloncesto: solo canastas de 1 y 2.

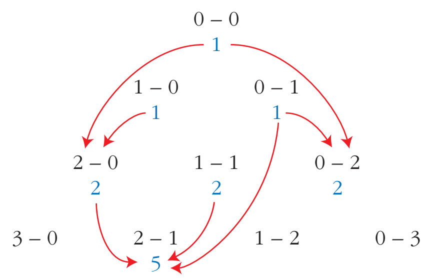
(0 – 0) → (1 – 0) → (2 – 0) → (3 – 0) → (4 – 0) → (5 – 0) → (6 – 0) → (7 – 0) → (8 – 0)

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

El número de formas que nos lleva a cada resultado se obtiene sumando los dos anteriores.

10. SOLO CON CANASTAS DE 1 Y 2

Averigua de cuántas formas se puede llegar al resultado 4-4 en un partido de baloncesto sin triples. (Por asombroso que parezca hay 556 formas. Compruébalo).



Hacemos un diagrama en el que aparezcan las distintas posibilidades de llegar a cada resultado:

0 – 0: **1**								
1 – 0: **1**	0 – 1: **1**							
2 – 0: **2**	1 – 1: **2**	0 – 2: **2**						
3 – 0: **3**	2 – 1: **5**	1 – 2: **5**	0 – 3: **3**					
4 – 0: **5**	3 – 1: **10**	2 – 2: **14**	1 – 3: **10**	0 – 4: **5**				
5 – 0: **8**	4 – 1: **20**	3 – 2: **32**	2 – 3: **32**	1 – 4: **20**	0 – 5: **8**			
6 – 0: **13**	5 – 1: **38**	4 – 2: **71**	3 – 3: **84**	2 – 4: **71**	1 – 5: **38**	0 – 6: **13**		
7 – 0: **21**	6 – 1: **71**	5 – 2: **149**	4 – 3: **207**	3 – 4: **207**	2 – 5: **149**	1 – 6: **71**	0 – 7: **21**	
8 – 0: **34**	7 – 1: **130**	6 – 2: **304**	5 – 3: **478**	4 – 4: **556**	3 – 5: **478**	2 – 6: **304**	1 – 7: **130**	0 – 8: **34**

Observa que cada resultado del diagrama lo obtenemos sumando los dos que tiene encima hacia la derecha con los dos que tiene encima hacia la izquierda.

Vemos que al resultado 4-4, sin triples, se puede llegar de 556 formas.

11. CON CANASTAS DE 1, 2 Y 3

Comprueba que, si en un partido de baloncesto se ha llegado en un cierto momento al resultado 4-4, esto ha podido ser de 784 formas distintas (teniendo en cuenta que se han podido marcar canastas de 1, 2 y 3 puntos).

Hacemos un diagrama en el que aparezcan las distintas posibilidades de llegar a cada resultado:

0 – 0 **1**								
1 – 0 **1**	0 – 1 **1**							
2 – 0 **2**	1 – 1 **2**	0 – 2 **2**						
3 – 0 **4**	2 – 1 **5**	1 – 2 **5**	0 – 3 **4**					
4 – 0 **7**	3 – 1 **12**	2 – 2 **14**	1 – 3 **12**	0 – 4 **7**				
5 – 0 **13**	4 – 1 **26**	3 – 2 **37**	2 – 3 **37**	1 – 4 **26**	0 – 5 **13**			
6 – 0 **24**	5 – 1 **56**	4 – 2 **89**	3 – 3 **106**	2 – 4 **89**	1 – 5 **56**	0 – 6 **24**		
7 – 0 **44**	6 – 1 **118**	5 – 2 **209**	4 – 3 **277**	3 – 4 **277**	2 – 5 **209**	1 – 6 **118**	0 – 7 **44**	
8 – 0 **81**	7 – 1 **244**	6 – 2 **477**	5 – 3 **698**	4 – 4 **784**	3 – 5 **698**	2 – 6 **477**	1 – 7 **244**	0 – 8 **81**

Observa que cada resultado del diagrama lo obtenemos sumando los tres que tiene encima hacia la derecha con los tres que tiene encima hacia la izquierda. Así, vemos que al resultado 4-4 se ha podido llegar de 784 formas.

Página 14

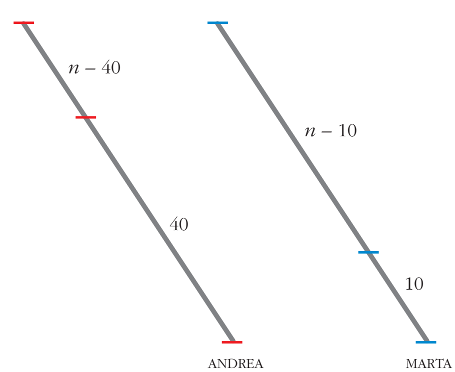
12. ESCALERA MECÁNICA 2

En una cierta escalera mecánica, la velocidad de subida de Andrea es 10 veces la de su hermanita pequeña, Marta. Andrea llega arriba subiendo 40 escalones. Marta llega arriba subiendo 10 escalones. ¿Cuántos escalones visibles tiene ese tramo de escalera?

Velocidad de Andrea, $10a$

Velocidad de Marta, a

Velocidad de la escalera, b



ANDREA - ESCALERA:

$$\frac{40}{10a} = \frac{n-40}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n-40}{4}$$

MARTA - ESCALERA:

$$\frac{10}{a} = \frac{n-10}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n-10}{10}$$

$$\frac{n-40}{4} = \frac{n-10}{10} \rightarrow 5n - 200 = 2n - 20 \rightarrow 3n = 180 \rightarrow n = 60$$

La escalera tiene 60 escalones visibles.

Página 15

13. ESCALERA MECÁNICA 4

Leticia tarda 10 s en bajar 50 escalones y completar, así, un tramo de escalera mecánica. Eva, más pausada, tarda 20 s y baja 30 escalones en el mismo tramo.

¿Cuántos escalones tiene ese tramo de escalera? ¿Cuánto tardaría cada una de ellas en bajarla si estuviera estropeado el mecanismo?

Llamamos v a la velocidad (en escalones por segundo) del mecanismo de la escalera.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{LETICIA:} & 50 \text{ esc en } 10 \text{ s} & \rightarrow \text{ n.º de escalones visibles} = 50 + 10v \\ \text{EVA:} & 30 \text{ esc en } 20 \text{ s} & \rightarrow \text{ n.º de escalones visibles} = 30 + 20v \end{array}\right\}$$

$50 + 10v = 30 + 20v \;\rightarrow\; 10v = 20 \;\rightarrow\; v = 2$ esc/s

N.º de escalones visibles $= 50 + 10 \cdot 2 = 70$

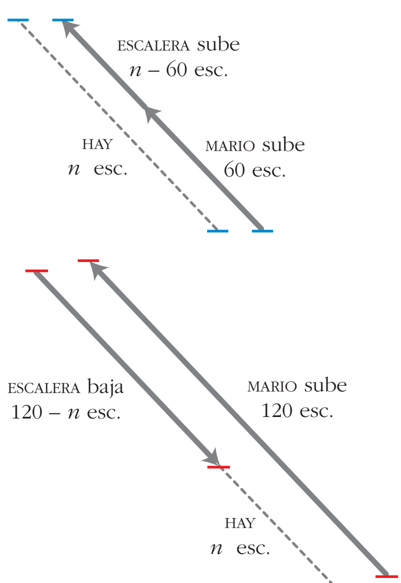
$$\text{Velocidad de LETICIA} = \frac{50}{10} = 5 \text{ esc/s} \xrightarrow[\text{70 ESCALONES}]{\text{TARDA EN BAJAR}} \frac{70}{5} = 14 \text{ segundos}$$

$$\text{Velocidad de EVA} = \frac{30}{20} = 1{,}5 \text{ esc/s} \xrightarrow[\text{70 ESCALONES}]{\text{TARDA EN BAJAR}} \frac{70}{1{,}5} = 46{,}7 \text{ segundos}$$

14. ESCALERAS DE SUBIDA Y BAJADA

Mario sube por la escalera mecánica de subida recorriendo un total de 60 escalones. Pero si sube por la de bajada (!) recorre 120 escalones. ¿Cuántos escalones visibles tienen esos tramos?

(Se supone que ambos tramos tienen la misma longitud y que sus velocidades son iguales).



Velocidad de Mario, a

Velocidad de la escalera, b

$$\frac{60}{a} = \frac{n-60}{b} \;\Rightarrow\; \frac{b}{a} = \frac{n-60}{60}$$

$$\frac{120}{a} = \frac{120-n}{b} \;\Rightarrow\; \frac{b}{a} = \frac{120-n}{120}$$

$$\frac{n-60}{60} = \frac{120-n}{120} \;\rightarrow\; 2(n-60) =$$

$= 120 - n \;\rightarrow\; 3n = 120 + 120 \;\rightarrow\; n = 80$

La escalera tiene 80 escalones visibles.

15. UN SISTEMA

Resuelve el sistema: $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{5}{y+1} = 1 \\ \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{2}{y+1} = 12 \end{cases}$

Hacemos un cambio de variable llamando: $\dfrac{1}{x-2} = X, \ \dfrac{1}{y+1} = Y$

Resolvemos el sistema que obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 3X - 5Y = 1 \\ 5X + 2Y = 12 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} X = 2 \\ Y = 1 \end{array}$$

Deshacemos el cambio:

$$\frac{1}{x-2} = 2 \ \rightarrow \ 1 = 2x - 4 \ \rightarrow \ 5 = 2x \ \rightarrow \ x = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{y+1} = 1 \ \rightarrow \ 1 = y + 1 \ \rightarrow \ y = 0$$

Solución: $x = \dfrac{5}{2}, \ y = 0$

16. UNA ECUACIÓN

Resuelve la siguiente ecuación, haciendo un cambio de variable adecuado:

$$(x^2 - 2x + 1)^2 - 2(x-1)^2 - 15 = 0$$

La ecuación la expresamos así:

$$[(x-1)^2]^2 - 2(x-1)^2 - 15 = 0$$

Hacemos el cambio de variable $z = (x-1)^2$ y obtenemos:

$$z^2 - 2z - 15 = 0 \ \rightarrow \ z_1 = -3, \ z_2 = 5$$

Deshacemos el cambio:

$z_1 = -3 \ \rightarrow \ (x-1)^2 = -3.$ Imposible

$z_2 = 5 \ \rightarrow \ (x-1)^2 = 5 \ \rightarrow \ x - 1 = \pm\sqrt{5} \ \rightarrow \ x_1 = 1 + \sqrt{5}, \ x_2 = 1 - \sqrt{5}$

Soluciones: $x_1 = 1 + \sqrt{5}; \ x_2 = 1 - \sqrt{5}$

Página 18

17. **Deduce, paso a paso, justificadamente, una fórmula para despejar x en las ecuaciones del tipo $x^2 - mx + n = 0$.**

$$x^2 - mx + n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$4x^2 - 4mx + 4n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot m + m^2 - m^2 + 4n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2x - m)^2 = m^2 - 4n$$

$$\Downarrow$$

$$2x - m = \pm\sqrt{m^2 - 4n}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

18. **Demuestra que si x_1 y x_2 son las dos raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x_1 + x_2 = -b/a$ y $x_1 \cdot x_2 = c/a$.**

Las dos raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

19. **Demuestra que $n^3 - n$ es múltiplo de 6.**

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)\,n\,(n + 1)$$

Es el producto de tres números enteros consecutivos. Alguno de ellos es múltiplo de 3, y alguno de ellos es múltiplo de 2. Por tanto, el producto es múltiplo de 6.

20. **Si $\bar{x}$ es la media aritmética de n números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, demuestra que:**

$$\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}$$

$$A = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} =$$

$$= \frac{\Sigma x_i^2}{n} + \frac{\Sigma(-2x_i\bar{x})}{n} + \frac{\Sigma \bar{x}^2}{n} = \frac{\Sigma x_i^2}{n} + \frac{-2\bar{x}\Sigma x_i}{n} + \frac{\Sigma \bar{x}^2}{n}$$

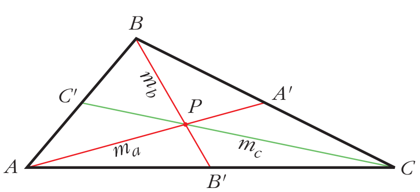
Observamos que:

$$\frac{k\Sigma x_i}{n} = k\frac{\Sigma x_i}{n} = k\bar{x}$$

$\Sigma k = nk$, pues es el resultado de sumar n veces el número k.

Por tanto: $A = \dfrac{\Sigma x_i^2}{n} - 2\,\bar{x}\,\bar{x} + \dfrac{n\bar{x}^2}{n} = \dfrac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

21. **Demuestra que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto.**



La mediana m_a corta a m_b en un punto P tal que $\overline{PB} = 2\overline{PB'}$

La mediana m_c corta a m_b en un punto Q tal que $\overline{QB} = 2\overline{QB'}$

Por tanto, P y Q son el mismo punto.

Es decir, las tres medianas se cortan en un punto.

22. **Demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°.**

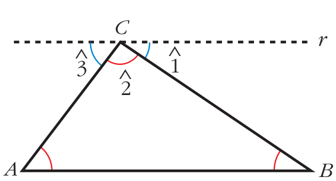
Trazamos una recta que pasa por C y es paralela a AB.

$\hat{1} = \hat{B}$ por ser ángulos alternos internos (la recta CB corta a un par de paralelas).

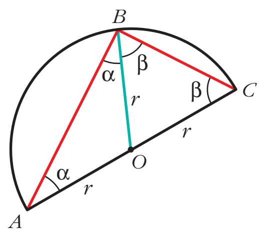
$\hat{3} = \hat{A}$ por ser ángulos alternos internos (la recta AC corta a un par de paralelas).

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$, evidentemente.

Por tanto, $\hat{B} + \hat{C} + \hat{A} = 180°$



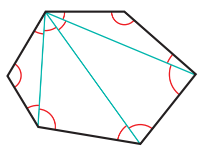
23. **Demuestra que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es, necesariamente, recto.**



Los triángulos AOB y BOC son isósceles, pues cada uno de ellos tiene dos lados iguales a un radio de la circunferencia. Cada uno de ellos tiene un par de ángulos iguales.

Observamos que el ángulo $\hat{B}$ del triángulo ABC mide $\alpha + \beta$, lo mismo que la suma de los otros dos. Como entre los tres suman $180°$, $\hat{B} = 90°$.

24. **Demuestra que la suma de los ángulos de un polígono de n lados es $180°(n - 2)$.**



Es así, pues un polígono de n lados se puede descomponer en $n - 2$ triángulos, la suma de cuyos ángulos coincide con la suma de los ángulos del polígono.

25. **Demuestra que cada ángulo de un n-ágono regular es $180° - \dfrac{360°}{n}$.**

Si un polígono es regular, cada ángulo mide:

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \frac{n \cdot 180° - 360°}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$$

Página 19

26. **Demuestra las siguientes desigualdades:**

a) $m^2/(1 + m^4) \le 1/2$

b) $(m^2 + 3)/\sqrt{m^2 + 2} > 2$

a) Si $m = 0$, la desigualdad se cumple, evidentemente.

Si $m \neq 0$, podemos invertir en los dos miembros, cambiando el sentido de la desigualdad:

$$\left(\frac{m^2}{1 + m^4} \le \frac{1}{2}, \quad m \neq 0\right) \Leftrightarrow \frac{1 + m^4}{m^2} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{1 + m^4}{m^2} - 2 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + m^4 - 2m^2}{m^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(m^2)^2 - 2m^2 + 1}{m^2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m^2 - 1)^2}{m^2} \ge 0$$

La última desigualdad es cierta (un cociente de cuadrados es nulo si lo es el numerador, o es positivo). Por tanto, es cierta la primera desigualdad, pues son equivalentes.

b) Puesto que tanto numerador como denominador son positivos, podemos elevar al cuadrado sin que se produzcan alteraciones:

$$\frac{m^2+3}{\sqrt{m^2+2}} > 2 \iff \frac{m^4+6m^2+9}{m^2+2} > 4 \iff \frac{m^4+6m^2+9}{m^2+2} - 4 > 0 \iff$$

$$\iff \frac{m^4+6m^2+9-4m^2-8}{m^2+2} > 0 \iff \frac{m^4+2m^2+1}{m^2+2} > 0 \iff$$

$$\iff \frac{(m^2+1)^2}{m^2+2} > 0, \text{ lo cual es evidente.}$$

Por tanto, se cumple la primera desigualdad.

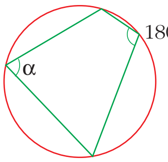
Página 20

27. Demuestra que $\sqrt{3}$ es irracional.

La demostración es absolutamente similar a la de $\sqrt{2}$.

28. Tres de los ángulos de un cuadrilátero miden 30°, 130° y 140°. Demuestra que no se puede inscribir en una circunferencia.

Ten en cuenta que los ángulos de un cuadrilátero suman 360° y que si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, sus ángulos opuestos son suplementarios.



Supongamos que el cuadrilátero descrito sí se pudiera inscribir en una circunferencia. En tal caso, cada dos ángulos opuestos sumarían 180°.

Pero los cuatro ángulos de este cuadrilátero, que miden 30°, 130°, 140° y 60°, no se pueden emparejar de modo que cada dos sumen 180°.

Por tanto, este cuadrilátero no se puede inscribir en una circunferencia.

Página 21

29. Demuestra que $n^3 - n$ es múltiplo de 6 para cualquier valor natural de n.

Ya se ha demostrado en el ejercicio 19. Ahora, lo haremos aplicando el método de inducción.

a) Para $n = 1 \rightarrow 1^3 - 1 = 0 = \dot{6}$ (múltiplo de 6).

b) Supongamos que es cierto para $n = k$; es decir, que:

$k^3 - k = \dot{6}$; veamos si se cumple para $n = k + 1$:

$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3k^2 + 3k =$

$= (k^3 - k) + 3k(k+1) = \dot{6} + \dot{6} = \dot{6}$, como queríamos probar.

Observación: $k^3 - k = \dot{6}$ por la hipótesis de inducción.

$3k(k+1) = \dot{6}$, pues $k(k+1)$ siempre es par.

30. **Demuestra que $n^3 + 5n$ es múltiplo de 6 para cualquier valor natural de n.**

a) Para $n = 1 \rightarrow 1^3 + 5 \cdot 1 = 6 = \dot{6}$ (múltiplo de 6).

b) Supongamos que es cierto para $n = k$; es decir, que:

$k^3 + 5k = \dot{6}$; veamos si se cumple para $n = k + 1$:

$$(k + 1)^3 + 5(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 =$$

$$= (k^3 + 5k) + 3k(k + 1) + 6 = \dot{6} + \dot{6} + \dot{6} = \dot{6}$$

como queríamos probar.

Observación: $k^3 + 5k = \dot{6}$ por la hipótesis de inducción.

$3k(k + 1) = \dot{6}$, pues $k(k + 1)$ siempre es par.

31. **Demuestra que $6^{2n} - 1$ es divisible por 35 para cualquier valor de n (natural).**

Que $6^{2n} - 1$ sea divisible por 35 significa que $6^{2n} - 1$ es múltiplo de 35; es decir, tenemos que probar que:

$6^{2n} - 1 = \dot{35}$ para cualquier n ($\dot{35}$ significa múltiplo de 35).

Lo probamos mediante el método de inducción completa:

a) Para $n = 1 \rightarrow 6^2 - 1 = 35 = \dot{35}$

b) Supongamos que es cierto para $n = k$; es decir, que:

$6^{2k} - 1 = \dot{35}$; veamos si se cumple para $n = k + 1$:

$$6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1 = 6^{2k} \cdot 6^2 - 1 = 6^{2k} \cdot 36 - 1 = 6^{2k}(35 + 1) - 1 =$$

$$= 6^{2k} \cdot 35 + (6^{2k} - 1) = \dot{35} + \dot{35} = \dot{35},$$ como queríamos probar.

32. **Demuestra la igualdad para n natural: $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$**

a) Para $n = 1$, queda: $1 = 1 \rightarrow$ Es cierta la igualdad.

b) Supongamos que es cierta para $n = k$; es decir, que:

$$(1 + 2 + \ldots + k)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3$$

Veamos si, en este supuesto, es cierta para $n = k + 1$:

$$(1 + 2 + \ldots + k + (k + 1))^2 = (1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k + 1)^2 + 2(1 + 2 + \ldots + k)(k + 1) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis de inducción}}}{=} 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^2 + 2(k + 1)(1 + 2 + \ldots + k) \underset{(*)}{=}$$

$$= 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^2 + 2(k + 1)\left(\frac{(k + 1)k}{2}\right) =$$

$$= 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^2 + (k + 1)^2\, k \underset{(**)}{=}$$

$$= 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^2\,(1 + k) =$$

$$= 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3,$$ como queríamos demostrar.

Notas: (*) Hemos utilizado que $1 + 2 + \ldots + k = \frac{(k+1)k}{2}$, que es la suma de k términos de una progresión aritmética de $a_1 = 1$ y $d = 1$.

(**) En los dos últimos sumandos hemos sacado $(k+1)^2$ factor común.

33. Demuestra que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Lo haremos, también, por inducción completa:

- Para $n = 1$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{PRIMER MIEMBRO: } 1^3 = 1 \\ \text{SEGUNDO MIEMBRO: } \dfrac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1\end{array}\right\} \text{Coinciden}$$

La igualdad es cierta para $n = 1$.

- La suponemos cierta para n. ¿Lo será para $n + 1$?

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] =$$

$$= (n+1)^2\,\frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2[(n+1)+1]^2}{4}$$

Y este es el segundo miembro de la igualdad, pero cambiando n por $n+1$.

Página 22

PROBLEMAS PARA PRACTICAR

Números

1. MAYOR ENTERO

Halla el mayor número entero n tal que: $n^{200} < 5^{300}$

$$n^{200} < 5^{300} \Leftrightarrow (n^2)^{100} < (5^3)^{100} \Leftrightarrow n^2 < 5^3 \Leftrightarrow n^2 < 125$$

Como $\sqrt{125} \approx 11{,}18$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 11^2 = 121 < 125 \\ 12^2 = 144 > 125 \end{array}\right\} \rightarrow n = 11$$

El número 11 es el mayor entero tal que $n^{200} < 5^{300}$.

2. ENTEROS CONSECUTIVOS

El producto de cuatro enteros consecutivos es igual a 7 590 024. ¿Cuáles son dichos números?

Como $\sqrt[4]{7\,590\,024} \approx 52{,}488$, probamos con números cercanos a 52.

Tanteando, obtenemos que: $51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 = 7\,590\,024$

Por tanto, los números son 51, 52, 53 y 54.

3. DÍGITO DISTINTO DE CERO

El número $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50$ es un número enormemente grande.

¿Qué lugar ocupa el primer dígito distinto de cero empezando desde las unidades?

Contamos el número de veces que aparece el factor 5 (el factor 2 aparecerá más veces):

$$\underbrace{10}_{\begin{array}{c} 5 \cdot 1 = 5 \\ 5 \cdot 2 = 10 \\ 5 \cdot 3 = 15 \\ \vdots \\ 5 \cdot 10 = 50 \end{array}} + \underbrace{2}_{\begin{array}{c} 5^2 \cdot 1 = 25 \\ 5^2 \cdot 2 = 50 \end{array}} = 12 \text{ veces}$$

Por tanto, el número dado acaba en 12 ceros; y, así, el primer dígito distinto de cero empezando desde las unidades es el que ocupa el lugar número 13.

4. **¿QUÉ NÚMEROS SON?**

El número $2^{48} - 1$ es divisible exactamente por dos números comprendidos entre 60 y 70. ¿Cuáles son dichos números?

☛ ***Haz uso de la propiedad $a^{2n} - 1 = (a^n + 1)(a^n - 1)$.***

Utilizando la propiedad $a^{2n} - 1 = (a^n + 1)(a^n - 1)$, tenemos que:

$$2^{48} - 1 = (2^{24} + 1)(2^{24} - 1) = (2^{24} + 1)(2^{12} + 1)(2^{12} - 1) =$$

$$= (2^{24} + 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^6 + 1) \cdot (2^6 - 1) = (2^{24} + 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot 63 \cdot 65$$

Por tanto, los números buscados son 63 y 65.

5. **NO TENÍAN CALCULADORA, CLARO**

En 1856 se publicó un libro (gordísimo) que contenía *los cuadrados de los números desde el uno hasta el mil millones*. ¿Para qué? Para multiplicar. Te toca a ti averiguar y explicar cómo. Para ello, relaciona el producto de dos números $m \cdot n$ con la diferencia de los cuadrados de $m + n$ y $m - n$.

Explica cómo se usaría “el libro de los cuadrados” para efectuar el producto de dos números muy gordos (por ejemplo, 57 839 · 8 756) mediante operaciones más sencillas.

$$(m + n)^2 - (m - n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 - m^2 + 2mn - n^2 = 4mn$$

Por tanto:

$$mn = \frac{(m + n)^2 - (m - n)^2}{4}$$

$(m + n)^2$ y $(m - n)^2$ se miran en "el libro gordo de los cuadrados".

Por ejemplo:

$$57\,839 \cdot 8\,756 = \frac{(57\,839 + 8\,756)^2 - (57\,839 - 8\,756)^2}{4} = \frac{66\,595^2 - 49\,083^2}{4} =$$

$$= \frac{4\,434\,894\,025 - 2\,409\,140\,889}{4} = 506\,438\,284$$

6. **CUESTA ARRIBA, CUESTA ABAJO**

Un corredor asciende una colina a una velocidad de 4 km/h. ¿A qué velocidad habrá de descender si pretende que la velocidad media final sea de 7 km/h?

Llamamos L a la longitud del camino (subida o bajada).

El tiempo de subida es: $t_1 = \frac{L}{4}$

El tiempo de bajada es: $t_2 = \frac{L}{v}$ (v es la velocidad de bajada)

El tiempo total es: $t_1 + t_2 = \frac{2L}{7}$

Por tanto: $\frac{L}{4} + \frac{L}{v} = \frac{2L}{7} \to \frac{1}{4} + \frac{1}{v} = \frac{2}{7} \to v = 28$ km/h

NOTA INTERESANTE

¿Qué relación hay entre la velocidad media, 7 km/h, con las velocidades de subida, 4 km/h, y bajada, 28 km/h?

Evidentemente, no es la media aritmética de las velocidades. Es otra media. Se llama ***media armónica***.

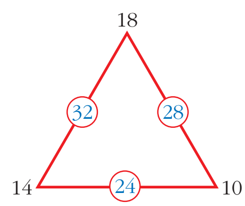
$$\frac{1}{7} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{28}}{2}$$

La inversa de la media armónica es la media aritmética de las inversas de los dos componentes.

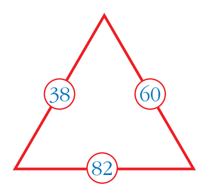
Ecuaciones

7. ¿CUÁNTO VALEN LOS VÉRTICES?

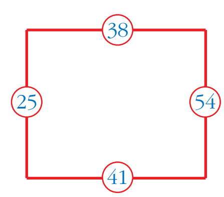
En este triángulo, el número encerrado en un círculo es la suma de los vértices correspondientes:

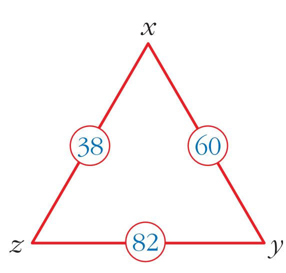


a) Siguiendo esta misma ley, ¿cuál es el valor de los vértices en este otro triángulo?



b) ¿Cuál es el valor de los vértices en este cuadrado?



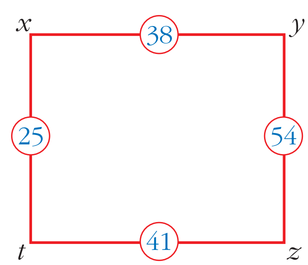


$$\left.\begin{array}{r} x + y = 60 \\ y + z = 82 \\ x + z = 38 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} y = 60 - x \\ 60 - x + z = 82 \to -x + z = 22 \\ x + z = 38 \end{array}\right\}$$

Sumando estas dos últimas:

$$\left.\begin{array}{l} 2z = 60 \to z = 30 \\ x = 38 - z = 38 - 30 = 8 \\ y = 60 - x = 60 - 8 = 52 \end{array}\right\} \quad x = 8, \;\; y = 52, \;\; z = 30$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 38 \\ y + z = 54 \\ z + t = 41 \\ t + x = 25 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 38 - x \\ z = 54 - y = 54 - 38 + x = 16 + x \\ z = 41 - t \\ x = 25 - t \end{array}\right\}$$



$$y = 38 - (25 - t) = 13 + t$$

$$z = 16 + x = 16 + 25 - t = 41 - t$$

Hay infinitas soluciones. Todas las de la forma:

$$x = 25 - \lambda \ ; \quad y = 13 + \lambda \ ; \quad z = 41 - \lambda \ ; \quad t = \lambda$$

siendo λ cualquier número real.

8. RESUELVE

Halla las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{y^2 + 1} = -0,3 \\ \dfrac{2}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{y^2 + 1} = 0,9 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{y^2 + 1} = -0,3 \\ \dfrac{2}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{y^2 + 1} = 0,9 \end{array}\right\}$$ Hacemos un cambio de variables:

$$a = \frac{1}{x^2 + 1}; \quad b = \frac{1}{y^2 + 1}$$

Así, el sistema queda como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} a - b = -0,3 \\ 2a + b = 0,9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = b - 0,3 \\ 2(b - 0,3) + b = 0,9 \ \to \ 3b = 1,5 \ \to \ b = 0,5 \ \to \ a = 0,5 - 0,3 = 0,2 \end{array}$$

Ahora es fácil obtener los valores de x e y:

$$a = \frac{1}{x^2 + 1} = 0,2 \ \to \ 1 = 0,2(x^2 + 1) \ \to \ \frac{1}{0,2} = x^2 + 1 \ \to$$

$$\to \ 5 = x^2 + 1 \ \to \ 4 = x^2 \ \to \ x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$b = \frac{1}{y^2 + 1} = 0,5 \ \to \ 1 = 0,5(y^2 + 1) \ \to \ \frac{1}{0,5} = y^2 + 1 \ \to$$

$$\to \ 2 = y^2 + 1 \ \to \ 1 = y^2 \ \to \ y = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Por tanto, hay cuatro soluciones para el sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

9. EL REMERO

Un remero va desde un punto A hasta otro B y vuelve otra vez a B en 10 horas. La distancia entre A y B es de 20 km.

Halla la velocidad de la corriente del agua, sabiendo que rema 2 km aguas arriba en el mismo tiempo que rema 3 km aguas abajo (se supone que su efectividad en cada remada siempre es la misma).

- Llamamos x a la velocidad de subida; así, la velocidad de bajada es $\frac{3}{2}x$.
- La velocidad media de todo el viaje es:

$$v = \frac{40 \text{ km}}{10 \text{ horas}} = 4 \text{ km/h}$$

Tiempo invertido en la ida: $t_1 = \frac{20}{x}$

Tiempo invertido en la vuelta: $t_2 = \frac{20}{(3/2)x}$

Por tanto, la velocidad media se obtiene así:

$$v_{\text{MEDIA}} = \frac{40 \text{ km}}{\frac{20}{x} + \frac{20}{(3/2)x} \text{ horas}} = \frac{40}{\frac{20}{x} + \frac{40}{3x}} = \frac{40}{\frac{100}{3x}} = \frac{120x}{100} = \frac{6x}{5}$$

Igualamos la velocidad media a su valor y así obtenemos el valor de x:

$$\frac{6x}{5} = 4 \quad \to \quad x = \frac{10}{3} \approx 3{,}33 \text{ km/h es la velocidad de subida.}$$

Velocidad de bajada: $\frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} = 5$ km/h

La velocidad de la corriente es:

$$v_{\text{CORRIENTE}} = v_{\text{BAJADA}} - v_{\text{REMERO}}$$

o bien:

$$v_{\text{CORRIENTE}} = v_{\text{REMERO}} - v_{\text{SUBIDA}}$$

Sumando:

$$2v_{\text{CORRIENTE}} = v_{\text{BAJADA}} - v_{\text{SUBIDA}}$$

- Por tanto, $v_{\text{CORRIENTE}} = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{10}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$ km/h

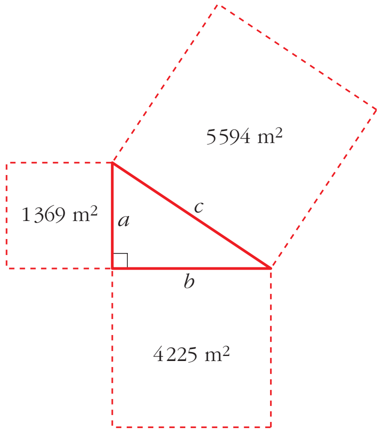
Página 23

Figuras

10. CAMPO TRIANGULAR

Un granjero tiene un campo triangular rodeado de tres campos cuadrados de manera que cada uno de estos tiene un lado común con el triángulo. Las superficies de los campos cuadrados son 4 225 m², 1 369 m² y 5 594 m². ¿Qué superficie tiene el campo triangular?

Hacemos un dibujo:



Observamos que:

$5\,594 = 1\,369 + 4\,225$; es decir, que:

$c^2 = a^2 + b^2$

Por tanto, el triángulo es rectángulo.

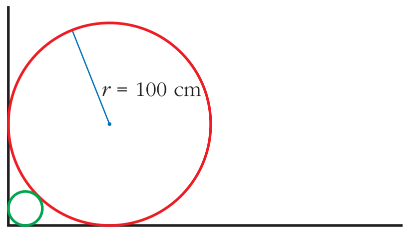
Su área será:

$$A = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{4\,525} \cdot \sqrt{1\,369}}{2} =$$

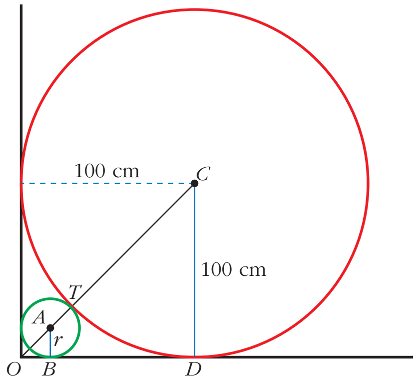
$$= \frac{65 \cdot 37}{2} = 1\,202{,}5 \text{ m}^2$$

11. BALÓN DE PLAYA

Un gran balón de playa de 100 cm de radio está apoyado sobre una pared que forma un ángulo recto con el suelo. ¿Cuál es el radio de la pelota más grande que puede situarse entre la pared, el suelo y el balón de playa?



Hacemos un dibujo:



$\overline{TC} = 100$ cm; $\overline{CD} = 100$ cm

$\overline{AB} = r$; $\overline{AT} = r$; $\overline{OB} = r$

$\overline{OC} = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$ cm

$\overline{OA} = r \cdot \sqrt{2}$

Por tanto, como: $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AT} + \overline{TC}$

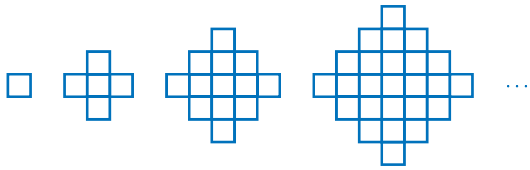
tenemos que: $100\sqrt{2} = r \cdot \sqrt{2} + r + 100$

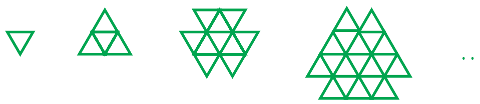
Despejamos r:

$$r = \frac{100(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)} = \frac{100(\sqrt{2} - 1)^2}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = 100(3 - 2\sqrt{2}) \approx 17{,}16 \text{ cm}$$

12. FIGURAS QUE CRECEN

Enuncia en los dos casos una regla para pasar de una figura a la siguiente.

a) 

b) 

Después de 20 pasos:

– ¿Cuántos cuadraditos contendrá la figura resultante en el caso a)?

– ¿Cuántos triangulitos contendrá la figura resultante en el caso b)?

Intenta responder a estas mismas preguntas despues de *n* pasos.

a) Sucesión con cuadrados:

$$\cancel{a_1} = 1$$

$$\cancel{a_2} = \cancel{a_1} + 4$$

$$\cancel{a_3} = \cancel{a_2} + 8$$

$$\cancel{a_4} = \cancel{a_3} + 12$$

$$\cancel{\ldots} = \cancel{\ldots}$$

$$a_n = \cancel{a_{n-1}} + 4(n-1)$$

Sumando: $a_n = 1 + 4 + 8 + 12 + \ldots + 4(n-1)$

$$a_n = 1 + 4\big(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\big) \overset{(*)}{=}$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{[1 + (n-1)](n-1)}{2} = 1 + 2(n-1)n$$

(*) Es la suma de $n - 1$ elementos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 1$ y $d = 1$.

Por tanto: $a_n = 1 + 2n(n-1)$

Al cabo de los 20 pasos habría 761 cuadraditos.

b) Sucesión con triángulos:

$$\cancel{a_1} = 1$$

$$\cancel{a_2} = \cancel{a_1} + 3$$

$$\cancel{a_3} = \cancel{a_2} + 6$$

$$\cancel{a_4} = \cancel{a_3} + 9$$

$$\cancel{\ldots} = \cancel{\ldots}$$

$$a_n = \cancel{a_{n-1}} + 3(n-1)$$

Sumando: $a_n = 1 + 3 + 6 + 9 + \ldots + 3(n-1)$

$$a_n = 1 + 3\big(1 + 2 + \ldots + (n-1)\big) \overset{(*)}{=} 1 + 3 \cdot \frac{[1 + (n-1)](n-1)}{2} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}n(n-1)$$

Por tanto: $a_n = 1 + \dfrac{3}{2}n(n-1)$

Al cabo de los 20 pasos habría 571 triangulitos.

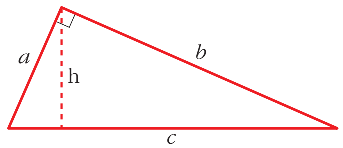
Demostrar

13. TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En un triángulo rectángulo, a y b son sus catetos y c su hipotenusa. Llamamos h a la altura correspondiente a la hipotenusa.

Demuestra que el triángulo con lados h, c + h y $a + b$ es rectángulo.

Sabemos que $a^2 + b^2 = c^2$, pues nos dicen que el triángulo de lados a, b y c es rectángulo.



Tenemos que probar que el triángulo de lados h, c + h y $a + b$ es rectángulo; es decir, que:

$$(a + b)^2 + \mathrm{h}^2 = (c + \mathrm{h})^2$$

Pero $(a + b)^2 + \mathrm{h}^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{c^2} + 2ab + \mathrm{h}^2 \overset{(*)}{=} c^2 + 2c\mathrm{h} + \mathrm{h}^2 = (c + \mathrm{h})^2$, como queríamos demostrar.

(*) Si consideramos como base el lado a, el área del triángulo es $\dfrac{a \cdot b}{2}$; y si consideramos como base el lado c, el área del triángulo es $\dfrac{c \cdot \mathrm{h}}{2}$.

Por tanto: $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{c\mathrm{h}}{2} \quad \rightarrow \quad ab = c\mathrm{h}$

14. MÚLTIPLO DE 12

Demuestra que si p es un número primo mayor que 3, entonces $p^2 - 1$ es un múltiplo de 12.

Podemos escribir $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Ten en cuenta que un múltiplo de 12 ha de ser múltiplo de 3 y de 4.

Podemos descomponer, como se indica en la ayuda, $p^2 - 1$ de la forma:

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$$

- Como p es impar (pues p es primo mayor que 3), $p - 1$ y $p + 1$ son pares. Al multiplicar dos números pares, necesariamente obtenemos un múltiplo de 4.

  Es decir, $p^2 - 1$ es múltiplo de 4.

- Además, como p no es múltiplo de 3 (pues p es primo mayor que 3), o bien $p - 1$, o bien $p + 1$ ha de ser múltiplo de 3 (pues $p - 1, p, p + 1$ son tres números consecutivos; uno de ellos ha de ser múltiplo de 3). Luego $p^2 - 1$ es múltiplo de 3.

- Como $p^2 - 1$ es múltiplo de 4 y de 3, lo será de 12, como queríamos probar.

15. PRIMOS LEJANOS

a) Demuestra que existen dos números primos consecutivos cuya diferencia es mayor que 1 000.

b) Demuestra que, por grande que sea m, existen dos números primos consecutivos cuya diferencia es mayor que m. (Es decir, que hay m números compuestos consecutivos).

a) El número $1\,001! + 1$ es primo, pues no es divisible por ninguno de los 1 001 primeros números.

Los números $1\,001! + n$, siendo $n = 2, 3, 4, ..., 1\,001$ no son primos.

Por ejemplo, $1\,001! + 719$ es múltiplo de 719, pues $1\,001!$ lo es.

Por tanto, hay mil o más números compuestos consecutivos.

b) Análogamente se razona que $(m + 1)! + 1$ es un número primo y los $m + 1$ números enteros siguientes son compuestos.

16. POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

Si a y b son dos números distintos y ambos positivos, demuestra, por el método de reducción al absurdo, las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{2ab}{a+b}$

b) $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

a) Supongamos que la desigualdad es falsa, es decir, que:

$$\frac{a+b}{2} \le \frac{2ab}{a+b}$$

como a y b son positivos, $a + b$ también lo es; entonces: $(a+b)^2 \le 4ab$

Desarrollamos el cuadrado y agrupamos términos:

$$a^2 + 2ab + b^2 \le 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \le 0$$

$$(a-b)^2 \le 0$$

Pero como $a \ne b$, $(a-b)^2$ no es cero y nunca puede ser negativo. Hemos llegado a un absurdo; por tanto:

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$$

b) Suponemos que es falsa la desigualdad; es decir, que:

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{ab}$$

Elevando al cuadrado ($a + b$ es positivo, por serlo a y b) y operando:

$$a + b \le 2\sqrt{ab}$$

$$(a+b)^2 \le 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \le 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \le 0$$

$$(a-b)^2 \le 0$$

Llegamos a la misma conclusión que en el apartado anterior; es un absurdo, y, por tanto:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

17. DESIGUALDAD

Si $m \geq 0$ y $n \geq 0$, demuestra:

$$(m + n)/2 \leq \sqrt{(m^2 + n^2)/2}$$

Como $m \geq 0$ y $n \geq 0 \Rightarrow \dfrac{m+n}{2} \geq 0$ y tenemos que:

$$\frac{m+n}{2} \leq \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \leq \frac{m^2+n^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2+n^2+2mn}{4} \leq \frac{m^2+n^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 + n^2 + 2mn \leq 2m^2 + 2n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m^2 + n^2 - 2mn \leq 0 \leq (m-n)^2,$$ lo cual es cierto.

18. INDUCCIÓN

Aplicando el método de inducción completa, demuestra en cada caso:

a) $2^n > 2n + 1$ para cualquier natural $n \geq 3$.

b) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$ para cualquier n natural.

a) I) Para $n = 3 \rightarrow 2^3 = 8 > 2 \cdot 3 + 1 \rightarrow$ es cierta

II) Supongamos que es cierta para $n = k$; es decir, que:

$$2^k > 2k + 1$$

Tenemos que probar que se cumple para $n = k + 1$; esto es, que es cierta la igualdad:

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 1$$

Veámoslo:

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis de inducción}}}{>} (2k+1) \cdot 2 = 4k + 2 = 2k + 3 + (2k - 1) > 2k + 3 \text{ si } k \geq 3$$

Por tanto, al cumplirse el principio de inducción completa $(k \geq 3)$, es cierta la desigualdad.

b) I) Para $n = 1 \rightarrow 1 \cdot (3 + 1) = 1 \cdot 2^2 \rightarrow$ es cierta

II) Supongamos que es cierta para $n = k$; es decir, que:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k(3k + 1) = k(k + 1)^2$$

Tenemos que probar que se cumple para $n = k + 1$:

$$\underbrace{1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + k(3k + 1)}_{\text{hipótesis de inducción}} + (k + 1)(3k + 4) =$$

$$= k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4) = (k + 1)\left[k(k + 1) + (3k + 4)\right] =$$

$\uparrow$

sacamos $(k + 1)$ factor común

$$= (k^2 + k + 3k + 4) = (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2$$

Por tanto, se cumple el principio de inducción completa para cualquier n.

Página 24

19. MÁS INDUCCIÓN

Utiliza el método de inducción completa para demostrar estas igualdades para n natural:

a) $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \dfrac{n(n + 1)}{2} = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$

a) I) Para $n = 1 \rightarrow \dfrac{1 \cdot (1 + 1)}{2} = 1$; $\dfrac{1 \cdot (1 + 1)(1 + 2)}{6} = 1 \rightarrow$ es cierta

II) Supongamos que es cierta para $n = k$; es decir, que:

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k + 1)}{2} = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{6}$$

Tenemos que probar que, en este caso, sería cierta para $n = k + 1$:

$$\underbrace{1 + 3 + 6 + \dots + \frac{k(k + 1)}{2}}_{\text{hipótesis de inducción}} + \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{6} + \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} =$$

$$= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}\left(\frac{k}{3} + 1\right) = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{6}$$

Como queríamos demostrar.

b) I) Para $n = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1 + 1} \quad \rightarrow$ es cierta

II) Supongamos que se cumple para $n = k$; es decir, que:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k + 1)} = \frac{k}{k + 1}$$

Tenemos que probar que, en este caso, sería cierta para $n = k + 1$:

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k + 1)}}_{\text{hipótesis de inducción}} + \frac{1}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{k}{k + 1} + \frac{1}{(k + 1)(k + 2)} =$$

$$= \frac{1}{k + 1}\left[k + \frac{1}{k + 2}\right] = \frac{1}{k + 1}\left[\frac{k^2 + 2k + 1}{k + 2}\right] =$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{(k + 1)^2}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{k + 1}{k + 2}$$

Como queríamos demostrar.

20. BUSCA UNA REGLA GENERAL

Observa que:

1 = 1

1 – 4 = –(1 + 2)

1 – 4 + 9 = 1 + 2 + 3

…

¿Qué regla general siguen estas igualdades?

Exprésalo en la notación conveniente y demuéstralo.

Observamos que:

$1^2 = 1$

$1^2 - 2^2 = -(1 + 2)$

$1^2 - 2^2 + 3^2 = (1 + 2 + 3)$

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 = -(1 + 2 + 3 + 4)$

…

Es decir, en general:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot i^2 = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} i$$

Demostración

Aplicaremos el método de inducción. Partiremos de la igualdad para n y, a partir de ella, demostraremos la igualdad para $n + 1$.

$$(*) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot i^2 + (-1)^{n+2}(n+1)^2$$

Tenemos en cuenta que:

$$(-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} i = (-1)^{n+1}(1 + 2 + 3 + \dots + n) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n}{2}$$

Por tanto:

$$(*) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n}{2} - (-1)^{n+1} (n+1)^2 = (-1)^{n+1} \left[\frac{(n+1)n}{2} - (n+1)^2 \right] =$$

$$= (-1)^{n+2} \left[(n+1)^2 - \frac{(n+1)n}{2} \right] = (-1)^{n+2} (n+1) \left[(n+1) - \frac{n}{2} \right] =$$

$$= (-1)^{n+2} (n+1) \frac{n+2}{2} \overset{(1)}{=} (-1)^{n+2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} i$$ que es a lo que queríamos llegar.

(1) $(n+1)\dfrac{n+2}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1)$

Principio del palomar

21. PALOMAS Y ORIFICIOS

Un conjunto de 40 palomas llegan volando y se introducen en el palomar por los 36 orificios que hay. Explica por qué tendremos la seguridad de que por alguno de los orificios han entrado al menos dos palomas.

La idea que sustenta esta situación es la que permite resolver los siguientes ejercicios.

Si las 36 primeras palomas entran, cada una, por un orificio, la siguiente ha de entrar, necesariamente, por un orificio repetido. En este contexto, el razonamiento es muy sencillo. Lo llamamos, en general, PRINCIPIO DEL PALOMAR.

22. CUMPLEAÑOS COINCIDENTE

En un instituto de 450 estudiantes, demuestra que hay, al menos, dos personas con la misma fecha de cumpleaños.

Aplicamos el principio del palomar:

Hay 365 (o 366) fechas posibles para el cumpleaños; si hay 450 personas, deben coincidir, al menos, dos de ellas.

23. PIN DE CUATRO DÍGITOS

Los "números secretos" de las tarjetas de crédito constan de cuatro dígitos. Por ejemplo, 2704, 0012, 9461 son posibles números.

Demuestra que, con seguridad, hay dos tarjetas que tienen el mismo número.

El número de tarjetas de crédito existentes supera a 10 000, que es el número de posibles "números secretos". Aplicando el principio del palomar, con seguridad, hay dos tarjetas que tienen el mismo "número secreto".

24. AUNQUE NO HAYA CALVOS

¿Podrías asegurar que en tu comunidad autónoma hay, al menos, dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza?

El número de pelos en la cabeza de una persona no supera los 200 000. El número de habitantes en tu comunidad autónoma, sí. Por el principio del palomar, habrá, al menos, dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza.

25. NÚMERO DE AMIGOS

En una fiesta hay 50 personas. Demuestra que, al menos, dos de ellas tienen el mismo número de amigos en la fiesta.

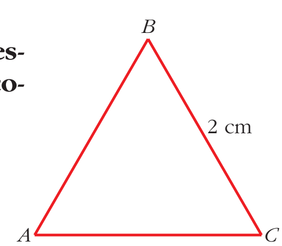
Aplicaremos el principio del palomar.

Tenemos las siguientes posibilidades para el número de amigos de cada persona: 0, 1, 2, …, 49 (consideramos que si una persona es amiga de otra, la otra lo es de la primera; y que uno no se cuenta como amigo suyo). Tendríamos 50 posibilidades, pero todas a la vez no se pueden dar. Si hay una persona con 0 amigos, no puede haber otra con 49 amigos, pues la de 0 amigos no sería amiga suya. Estas dos posibilidades no se pueden dar a la vez.

Por tanto, como mucho, tenemos 49 posibilidades; y hay 50 personas. Si asociamos a cada persona una posibilidad, necesariamente habrá dos personas (al menos) con la misma posibilidad, es decir, con el mismo número de amigos.

26. PUNTOS EN UN TRIÁNGULO

Sea *ABC* un triángulo equilátero de lado 2 cm. Demuestra que si se eligen cinco puntos de su interior, hay, como mínimo, dos puntos que distan menos de 1 cm.



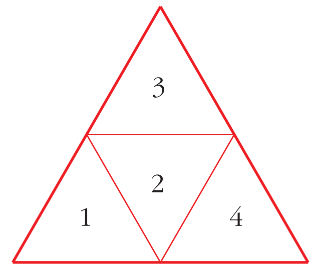
Desde luego, podríamos dibujar cientos de configuraciones de cinco puntos interiores y comprobaríamos que siempre se verifica. Pero esto no es suficiente.

Para demostrar lo que se nos pide, dividamos el triángulo en cuatro triángulos equiláteros, tal como se indica en la figura.

Los lados de cada triángulo tienen 1 cm de lado.

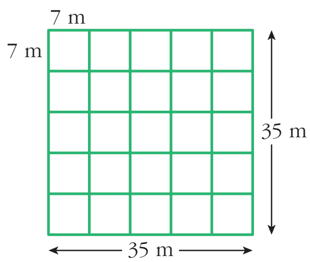
Si elegimos 5 puntos cualesquiera, necesariamente en uno de los triángulos pequeños habrá, al menos, dos de los puntos. Por tanto, la distancia entre ellos es menor que 1 cm.

Como puede verse, hemos aplicado el principio del palomar (5 puntos se debían introducir en 4 triángulos).



27. OVEJAS CERCANAS

En un campo cuadrado de 35 m de lado introducimos 26 ovejas para que pasten. Demuestra que siempre hay, al menos, dos de ellas que están a menos de 10 m.



Dividimos el cuadrado de lado 35 m en 25 cuadraditos de lado 7 m cada uno.

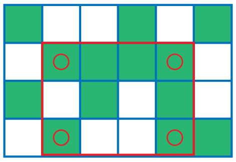
Al haber 26 ovejas, necesariamente han de estar, al menos dos, en un mismo cuadradito. Y la distancia máxima dentro del cuadradito es su diagonal, que mide:

$$\sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} < 10 \text{ m}$$

28. CUADRÍCULAS

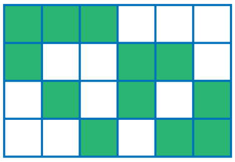
En la cuadrícula 4 × 6 que aparece a la derecha, hemos coloreado algunos de los cuadrados y otros los hemos dejado en blanco.

Esto se puede hacer de muchas formas. Intenta encontrar una de ellas en la cual no se pueda hallar un rectángulo con los cuatro vértices del mismo color (en la que hemos dibujado no sucede esto, como se ve con los cuatro cuadrados señalados en rojo).



Sin embargo, si la cuadrícula fuera 4 × 7 no sería posible encontrar una configuración en la que no hubiera un rectángulo con los cuatro vértices del mismo color.

- Veamos una forma en la que no se puede hallar un rectángulo con los cuatro vértices del mismo color:



Cuadrícula 4 × 6

- Hay 6 formas distintas de colorear dos cuadrados en una columna de 4. Si la cuadrícula fuese de 4 × 7, tendríamos 7 columnas para solo 6 posibilidades; por tanto, al menos una tendrá que repetirse.
- Si coloreáramos solo un cuadrado, tendríamos 4 formas distintas; y colorear 3 cuadrados es equivalente a colorear solo uno.
- Si coloreamos un número distinto de cuadrados en cada columna, aumentamos las posibilidades de coincidencia.