Resuelve

Página 309

¿Cuántas caras cabe esperar?

- **Repite el razonamiento anterior para averiguar *cuántas caras cabe esperar* si lanzamos 100 monedas y consideramos “casos raros” al 5 % de los casos extremos.**

El intervalo característico correspondiente a una probabilidad del 95 % (consideramos “casos raros” al 5 % de los casos extremos) es:

$$50 \pm 1{,}96 \cdot 5 = (40{,}2;\ 59{,}8)$$

Esto significa que en el 95 % de los casos en que tiremos 100 monedas, el número de caras que obtendremos será mayor que 40 y menor que 60. Cualquier otro resultado será un “caso raro”.

Un saco de alubias

Tenemos un saco con 10 000 alubias. De ellas, 9 500 son blancas y 500 son negras. Están bien mezcladas.

Extraemos 600 alubias.

¿Cuántas alubias negras *cabe esperar* que haya entre ellas?

- **Resuelve el problema anterior considerando como “casos raros” solo al 1 % de los casos extremos. Para ello:**

a) Averigua la proporción, p, de alubias negras en el saco.

b) Considera la distribución $B(600, p)$ y calcula su media $\mu = 600p$ y su desviación típica $\sigma = \sqrt{600 \cdot p(1-p)}$.

c) Considera la distribución $N(\mu, \sigma)$ y halla su intervalo característico correspondiente a una probabilidad del 99 %.

d) Decide, como consecuencia del resultado anterior, entre qué valores se encuentra el número de alubias negras que *cabe esperar*.

a) $p = \dfrac{500}{10\,000} = 0{,}05$

b) $\mu = 600 \cdot 0{,}05 = 30$; $\sigma = \sqrt{600 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = \sqrt{28{,}5} \approx 5{,}34$

c) El intervalo característico correspondiente a una probabilidad del 99 % es:

$$30 \pm 2{,}575 \cdot 5{,}34 = (16{,}25;\ 43{,}75)$$

d) En el 99 % de los casos en que saquemos 600 judías de ese saco, el número de judías negras será mayor que 16 y menor que 44. Cualquier otro resultado será un “caso raro” (llamando “casos raros” a ese 1 % de casos extremos).

Peces en un pantano

Se desea estimar el número total de peces que hay en cierto pantano. Para ello, se procede del siguiente modo:

- **Se pescan una cierta cantidad de ellos, por ejemplo, 349, se marcan y se devuelven al pantano. (Para marcarlos, existen unas tintas indelebles que son resistentes al agua).**
- **Al cabo de varios días, se vuelve a pescar otro montón y se averigua qué proporción de ellos están marcados.**

  Supongamos que en esta segunda pesca se han obtenido 514 peces, de los cuales hay 37 marcados.

■ **Con los datos anteriores, di cuántos peces crees que hay, aproximadamente, en el pantano.**

La muestra tiene 514 peces, de los cuales hay 37 marcados. La proporción de peces marcados en la muestra es:

$$pr = \frac{37}{514} = 0{,}072$$

El valor de la proporción de peces marcados en el pantano es $pr = \frac{349}{N}$, donde N es el número total de peces.

Aunque este problema se resolverá de forma completa (mediante un intervalo de confianza) al terminar la unidad, podemos suponer que la proporción de peces marcados en la muestra y en el pantano será "aproximadamente" la misma; es decir:

$$\frac{37}{514} \approx \frac{349}{N} \;\rightarrow\; N \approx 4\,848{,}27 \;\rightarrow\; N \approx 4\,848 \text{ peces}$$

(Al considerar una probabilidad determinada, daremos un intervalo de confianza, obteniendo un resultado más preciso que este).

1 Distribución binomial. Repaso de técnicas básicas para el muestreo

Página 311

1 La variable x es binomial, con $n = 1\,200$ y $p = 0{,}008$.

a) Calcula la probabilidad de que x sea mayor que 100.

b) Halla el intervalo característico para una probabilidad del 95 %.

Como $np = 9{,}6 > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = np = 9{,}6$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1\,200 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}992} = 3{,}09$.

Es decir:

$$x \text{ es } B(1\,200;\ 0{,}008) \ \to\ x' \text{ es } N(9{,}6;\ 3{,}09) \ \to\ z \text{ es } N(0,\ 1)$$

a) $P[x > 10] = P[x' \ge 10{,}5] = P\left[z \ge \dfrac{10{,}5 - 9{,}6}{3{,}09}\right] = P[z \ge 0{,}29] = 1 - P[z < 0{,}29] = 1 - 0{,}6141 = 0{,}3859$

b) Para una probabilidad del 95 %, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El intervalo característico será:

$$(9{,}6 - 1{,}96 \cdot 3{,}09;\ 9{,}6 + 1{,}96 \cdot 3{,}09) = (3{,}54;\ 15{,}66)$$

2 Si tenemos un dado correcto y lo lanzamos 50 veces:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que "el 1" salga más de diez veces?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga "múltiplo de 3" al menos veinte veces?

a) Llamamos x = "n.° de veces que sale el 1"; así, x es $B\left(50, \dfrac{1}{6}\right)$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot \dfrac{1}{6} = 8{,}33$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6}} = 2{,}64$; es decir:

$$x \text{ es } B\left(50, \frac{1}{6}\right) \ \to\ x' \text{ es } N(8{,}33;\ 2{,}64) \ \to\ z \text{ es } N(0,\ 1)$$

$$P[x > 10] = P[x' \ge 10{,}5] = P\left[z \ge \frac{10{,}5 - 8{,}33}{2{,}64}\right] = P[z \ge 0{,}82] =$$

$$= 1 - P[z < 0{,}82] = 1 - 0{,}7939 = 0{,}2061$$

b) Llamamos x = "n.° de veces que sale múltiplo de 3". La probabilidad de obtener un múltiplo de 3 en una tirada es $p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Así, x es $B\left(50, \dfrac{1}{3}\right)$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot \dfrac{1}{3} = 16{,}67$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}} = 3{,}33$; es decir:

$$x \text{ es } B\left(50, \frac{1}{3}\right) \ \to\ x' \text{ es } N(16{,}67;\ 3{,}33) \ \to\ z \text{ es } N(0,\ 1)$$

$$P[x \ge 20] = P[x' \ge 19{,}5] = P\left[z \ge \frac{19{,}5 - 16{,}67}{3{,}33}\right] = P[z \ge 0{,}85] =$$

$$= 1 - P[z < 0{,}85] = 1 - 0{,}8023 = 0{,}1977$$

2 Distribución de las proporciones muestrales

Página 313

1 Como sabemos, en un dado correcto la proporción de veces que sale el 5 es 1/6 = $0,1\widehat{6}$. Halla cada uno de los intervalos característicos correspondientes al 90 %, 95 % y 99 % para la "proporción de cincos", en tandas de 100 lanzamientos de un dado correcto.

Las proporciones de cincos en tandas de 100 lanzamientos siguen una distribución normal de media $p = \frac{1}{6} = 0,17$ y desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(1/6) \cdot (5/6)}{100}} = 0,037$; es decir, pr es $N(0,17;\ 0,037)$.

Hallamos los intervalos característicos:

- Para el 90 %: $(0,17 \pm 1,645 \cdot 0,037) = (0,109;\ 0,231)$
- Para el 95 %: $(0,17 \pm 1,96 \cdot 0,037) = (0,097;\ 0,243)$
- Para el 99 %: $(0,17 \pm 2,575 \cdot 0,037) = (0,075;\ 0,265)$

3 Intervalo de confianza para una proporción o una probabilidad

Página 315

1 Se ha lanzado un dado 400 veces y se ha obtenido 72 veces el valor 4.

Estima el valor de la probabilidad $P[4]$ con un nivel de confianza del 90 %.

Para un nivel de confianza del 90%, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. La proporción de cuatros obtenidas en la muestra es:

$$pr = \frac{72}{400} = 0{,}18$$

El intervalo de confianza para estimar $P[4]$ será:

$$\left(0{,}18 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}18 \cdot 0{,}82}{400}};\ 0{,}18 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}18 \cdot 0{,}82}{400}}\right) = (0{,}148;\ 0{,}212)$$

Es decir, con un nivel de confianza del 90 %, la probabilidad de obtener 4 está entre 0,148 y 0,212.

2 ¿Cuántas veces tendremos que lanzar un dado, que suponemos levemente incorrecto, para estimar la probabilidad de "SACAR 6" con un error menor que 0,002 y un nivel de confianza del 95 %?

Para un nivel de confianza del 95 %, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Como desconocemos el valor de pr, tomaremos $pr = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$ (suponemos el dado levemente incorrecto).

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \to 0{,}002 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{n}} \to n = 135\,512{,}44$$

Deberemos lanzarlo, al menos, 135 513 veces.

4 ¿En qué consiste un test de hipótesis estadístico?

Página 316

1 a) En el ejemplo anterior, comprueba que si usamos un nivel de significación del 1 %, no podremos rechazar la hipótesis de que el dado es correcto.

b) Lanzamos una moneda 100 veces y obtenemos 60 caras. ¿Podremos aceptar la hipótesis de que la moneda es correcta con un nivel de significación del 5 %?

a) Si $\alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$ y el intervalo característico correspondiente será:

$$(0{,}167 - 2{,}575 \cdot 0{,}037;\ 0{,}167 + 2{,}575 \cdot 0{,}037) = (0{,}072;\ 0{,}262)$$

$0{,}25 \in (0{,}072;\ 0{,}262)$, luego no podremos rechazar la hipótesis de que el dado es correcto.

b) **HIPÓTESIS:** La moneda es correcta. Por tanto, $P[\text{CARA}] = \frac{1}{2}$.

RESULTADO EMPÍRICO (a partir de la muestra): $pr(\text{cara}) = 0{,}6$.

Si la hipótesis fuera cierta, entonces las proporciones, *pr*, de "caras" en las muestras de tamaño 100 seguirían una distribución normal:

$$N\left(0{,}5;\ \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{100}}\right) = N(0{,}5;\ 0{,}05)$$

Si $\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y el intervalo característico correspondiente será:

$$(0{,}5 - 1{,}96 \cdot 0{,}05;\ 0{,}5 + 1{,}96 \cdot 0{,}05) = (0{,}402;\ 0{,}598)$$

$0{,}6 \notin (0{,}402;\ 0{,}598)$, luego no podremos aceptar la hipótesis de que la moneda es correcta.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 317

1. Distribución de las proporciones muestrales

Hazlo tú. **Halla la probabilidad de que el número de microcircuitos defectuosos en un paquete sea superior a 25.**

Si hay más de 25 defectuosos, entonces la proporción de defectuosos es mayor que $\frac{25}{500}$ = 0,05.

$$P[pr > 0{,}05] = P\left[z > \frac{0{,}05 - 0{,}04}{0{,}00876}\right] = P[z > 1{,}14] = 1 - P[z \le 1{,}14] = 1 - 0{,}8729 = 0{,}1271$$

2. Estimación de una probabilidad

Hazlo tú. **Hemos fabricado, toscamente, un dado de madera. Lo lanzamos 400 veces y obtenemos 90 veces el 6. Estima la probabilidad de "SACAR 6" mediante intervalos con nivel de confianza:**

a) del 90 %. **b) del 95 %.** **c) del 99 %.**

$pr = \frac{90}{400} = 0{,}225$

La desviación típica es: $s = \sqrt{\frac{0{,}225 \cdot 0{,}775}{400}} = 0{,}021$

a) $1 - \alpha = 0{,}90 \to z_{\alpha/2} = 1{,}645$

La cota de error es: $E = 1{,}645 \cdot 0{,}021 = 0{,}03455$

Con lo que el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de confianza del 90 % queda:

$(0{,}225 \pm 0{,}035) = (0{,}19; 0{,}26)$

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \to z_{\alpha/2} = 1{,}96$

La cota de error es: $E = 1{,}96 \cdot 0{,}021 = 0{,}041$

Con lo que el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de confianza del 95 % queda:

$(0{,}225 \pm 0{,}041) = (0{,}184; 0{,}266)$

c) $1 - \alpha = 0{,}99 \to z_{\alpha/2} = 2{,}575$

La cota de error es: $E = 2{,}575 \cdot 0{,}021 = 0{,}054$

Con lo que el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de confianza del 99 % queda:

$(0{,}225 \pm 0{,}054) = (0{,}171; 0{,}279)$

Página 318

3. Tamaño de la muestra para estimar una proporción

Hazlo tú. **Suponemos, en principio, que una moneda es correcta. ¿Cuántas veces habremos de lanzarla para estimar $P[C] = p$ con un error menor que 0,02 y con un nivel de confianza del 99 %?**

$1 - \alpha = 0{,}99 \to z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$$E = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n}} \to 0{,}02 = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n}} \to n = \frac{2{,}575^2 \cdot 0{,}25}{0{,}02^2} = 4\,144{,}1$$

Tendríamos que lanzar la moneda 4 145 veces para estimar la probabilidad con menos de dos centésimas de error y con un nivel de confianza del 99 %.

4. Estimación de una proporción (resolución del problema inicial)

Hazlo tú. Estima el número de peces con un nivel de confianza del 80 %.

$1 - \alpha = 0{,}8 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}28$

$$E = 1{,}28 \cdot \sqrt{\frac{0{,}072 \cdot 0{,}928}{514}} = 0{,}015$$

Por tanto, el intervalo de confianza para p, al 80 %, es: (0,072 ± 0,015) = (0,057; 0,087)

$$0{,}057 = \frac{349}{N_1} \;\rightarrow\; N_1 \approx 6\,123$$

$$0{,}087 = \frac{349}{N_2} \;\rightarrow\; N_2 \approx 4\,011$$

Así, tenemos un nivel de confianza del 80 % de que el número de peces del pantano esté en el intervalo [4 011, 6 123].

Ejercicios y problemas guiados

Página 319

1. Cálculo de probabilidad en una binomial mediante paso a la normal

En una distribución binomial $x: B(80; 0{,}11)$, hallar $P[x > 4]$ pasando a una normal:

$$x': N(\mu, \sigma)$$

a) tomando $x' \geq 4{,}5$.

b) tomando $x' \geq 4$.

$$\left.\begin{array}{l}\mu = np = 80 \cdot 0{,}11 = 8{,}8 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}89} = 2{,}80\end{array}\right\} \to x': N(8{,}8; 2{,}8)$$

a) $P[x > 4] \approx P[x' \geq 4{,}5] = P\left[z \geq \dfrac{4{,}5 - 8{,}8}{2{,}8}\right] = P[z \geq -1{,}54] = 0{,}9382$

b) $P[x > 4] \approx P[x' \geq 4] = P\left[z \geq \dfrac{4 - 8{,}8}{2{,}8}\right] = P[z \geq -1{,}71] = 0{,}9564$

2. Describir la distribución de las proporciones muestrales a partir de la p poblacional

Sabemos que la proporción de personas Rh^+ es de 0,11. ¿Cómo se distribuyen las pr en muestras de tamaño 80? Hallarla razonadamente.

En 80 individuos, el número, n, de ellos que son Rh^+ se distribuye $B(80; 0{,}11)$ y, por tanto, n es $N(8{,}8; 2{,}8)$.

La proporción de Rh^+ entre los 80 individuos $pr = \dfrac{n}{80}$ es $N\left(0{,}11; \sqrt{\dfrac{0{,}11 \cdot 0{,}89}{80}}\right) = N(0{,}11; 0{,}035)$.

3. Intervalo de confianza para p a partir de una muestra

En una muestra de 80 personas hay 10 de ellas con Rh^+.

Estimar p (proporción de Rh^+ en la población) mediante un intervalo con un nivel de confianza del 95,5 %.

$$pr = \frac{10}{80} = 0{,}125$$

$$s = \sqrt{\frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{80}} = 0{,}037$$

$$1 - \alpha = 0{,}955 \to \alpha = 1 - 0{,}955 = 0{,}045 \to \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}045}{2} = 0{,}0225 \to$$

$$\to 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}0225 = 0{,}9775 \to z_{\alpha/2} = 2{,}005$$

$E = 2{,}005 \cdot 0{,}037 = 0{,}074$

El intervalo es: $(0{,}125 \pm 0{,}074) = (0{,}051; 0{,}199)$

4. Número de individuos que debe tener una muestra

Sabemos que la proporción de personas con Rh⁺ es un valor próximo a 0,1. Queremos estimar esta proporción en una etnia aún no estudiada.

¿Qué tamaño debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error estadístico no sea superior a 0,002?

$p = 0{,}1 \ \to\ s = \sqrt{\dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{n}}$

Para un nivel de confianza del 95 % tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Por tanto, el error máximo es:

$$0{,}002 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{n}} \ \to\ n = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}09}{0{,}002^2} = 86\,436$$

La muestra debe tener un tamaño de 86 436 personas.

5. Obtención del nivel de confianza de una estimación ya realizada

En una muestra de 500 personas hemos obtenido una proporción $pr = 0{,}118$ de individuos con Rh⁺. Hacemos la estimación de que la proporción p de la población está en el intervalo (0,116; 0,120). ¿Con qué nivel de confianza hacemos esta estimación?

$E = \dfrac{0{,}120 - 0{,}116}{2} = 0{,}002$

$pr = 0{,}118 \ \to\ s = \sqrt{\dfrac{0{,}118 \cdot 0{,}882}{500}} = 0{,}014$

$0{,}002 = z_{\alpha/2} \cdot 0{,}014 \ \to\ z_{\alpha/2} = \dfrac{0{,}002}{0{,}014} = 0{,}14$

$\dfrac{\alpha}{2} = P[z > 0{,}14] = 1 - 0{,}5557 = 0{,}4443 \ \to\ \alpha = 2 \cdot 0{,}4443 = 0{,}8886 \ \to\ 1 - \alpha = 1 - 0{,}8886 = 0{,}1114$

El nivel de confianza es del 11 %.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 320

Para practicar

Distribución de proporciones muestrales

1 **Averigua cómo se distribuyen las proporciones muestrales, p_r, para las poblaciones y las muestras que se describen a continuación:**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
PROPORCIÓN, p, EN LA POBLACIÓN	0,5	0,6	0,8	0,1	0,05	0,15
TAMAÑO, n, DE LA MUESTRA	10	20	30	50	100	100

Recordemos que, si $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, entonces, las proporciones muestrales siguen una distribución $N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$.

Aplicamos este resultado a cada uno de los casos propuestos. Observamos que en todos ellos se tiene que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

a) $N\left(0,5; \sqrt{\dfrac{0,5 \cdot 0,5}{10}}\right) = N(0,5; 0,158)$

b) $N\left(0,6; \sqrt{\dfrac{0,6 \cdot 0,4}{20}}\right) = N(0,6; 0,110)$

c) $N\left(0,8; \sqrt{\dfrac{0,8 \cdot 0,2}{30}}\right) = N(0,8; 0,073)$

d) $N\left(0,1; \sqrt{\dfrac{0,1 \cdot 0,9}{50}}\right) = N(0,1; 0,042)$

e) $N\left(0,05; \sqrt{\dfrac{0,05 \cdot 0,95}{100}}\right) = N(0,05; 0,0218)$

f) $N\left(0,15; \sqrt{\dfrac{0,15 \cdot 0,85}{100}}\right) = N(0,15; 0,036)$

2 **Halla los intervalos característicos para las proporciones muestrales del ejercicio anterior, correspondientes a las probabilidades que, en cada caso, se indican:**

a) 90 % **b) 95 %** **c) 99 %** **d) 95 %** **e) 99 %** **f) 80 %**

a) $z_{\alpha/2} = 1,645$

Intervalo $(0,5 - 1,645 \cdot 0,158; 0,5 + 1,645 \cdot 0,158) = (0,24; 0,76)$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$

Intervalo $(0,6 - 1,96 \cdot 0,110; 0,6 + 1,96 \cdot 0,110) = (0,38; 0,82)$

c) $z_{\alpha/2} = 2,575$

Intervalo $(0,8 - 2,575 \cdot 0,073; 0,8 + 2,575 \cdot 0,073) = (0,61; 0,99)$

d) $z_{\alpha/2} = 1,96$

Intervalo $(0,1 - 1,96 \cdot 0,042; 0,1 + 1,96 \cdot 0,042) = (0,018; 0,182)$

e) $z_{\alpha/2} = 2,575$

Intervalo $(0,05 - 2,575 \cdot 0,0218; 0,05 + 2,575 \cdot 0,0218) = (-0,006; 0,106)$

f) $z_{\alpha/2} = 1,28$

Intervalo $(0,15 - 1,28 \cdot 0,036; 0,15 + 1,28 \cdot 0,036) = (0,104; 0,196)$

3 **Cuatro de cada diez habitantes de una determinada población lee habitualmente el periódico Z.**

Halla el intervalo característico (para un nivel de confianza del 95 %) de la proporción que leen el periódico Z, en muestras de tamaño 49.

p = proporción de lectores del periódico $Z = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

El intervalo característico para la proporción de lectores, pr, en muestras de tamaño n es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Para el 95 % $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo será:

$$\left(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{49}};\ 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{49}}\right) = (0{,}26;\ 0{,}54)$$

4 **En un saco mezclamos judías blancas y judías pintas en la relación de 14 blancas por cada pinta.**

Extraemos un puñado de 100 judías.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de judías pintas esté entre 0,05 y 0,1?

b) Halla un intervalo para el 99 % de las proporciones de las muestras de tamaño 100.

a) La proporción de judías pintas es $p = \frac{1}{15}$. Si extraemos un puñado de 100 judías, tenemos una binomial $B\left(100; \frac{1}{15}\right)$.

Una proporción entre 0,05 y 0,1 significa que haya entre $100 \cdot 0{,}05 = 5$ y $100 \cdot 0{,}1 = 10$ judías pintas.

Por tanto, si x es $B\left(100; \frac{1}{15}\right)$, tenemos que calcular $P[5 < x < 10]$.

Como $100 \cdot \frac{1}{15} > 5$ y $100 \cdot \frac{14}{15} > 5$, podemos aproximar la binomial mediante una normal de media $\mu = 100 \cdot \frac{1}{15} = 6{,}67$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{14}{15}} = 2{,}49$.

Así, si x es $B\left(100; \frac{1}{15}\right)$ $\rightarrow$ x' es $N(6{,}67;\ 2{,}49)$ $\rightarrow$ z es $N(0,\ 1)$.

Calculamos:

$$P[5 < x < 10] = P[5{,}5 \le x' \le 9{,}5] = P\left[\frac{5{,}5 - 6{,}67}{2{,}49} \le z \le \frac{9{,}5 - 6{,}67}{2{,}49}\right] =$$

$$= P[-0{,}47 \le z \le 1{,}14] = P[z \le 11{,}4] - P[z \le -0{,}47] =$$

$$= P[z \le 1{,}14] - P[z \ge 0{,}47] = P[z \le 1{,}14] - (1 - P[z \le 0{,}47]) =$$

$$= 0{,}8729 - (1 - 0{,}6808) = 0{,}5537$$

b) Si consideramos muestras de tamaño 100, el intervalo característico para la proporción muestral es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{100}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{100}}\right)$$

Para el 99 % $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}99$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Así, el intervalo será:

$$\left(\frac{1}{15} - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{(1/15) \cdot (14/15)}{100}};\ \frac{1}{15} + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{(1/15) \cdot (14/15)}{100}}\right) = (0{,}0024;\ 0{,}1309)$$

5 **El 42 % de los habitantes de un municipio es contrario a la gestión del alcalde y el resto son partidarios de este.**

Si se toma una muestra de 64 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que ganen los que se oponen al alcalde?

En muestras de 64, el número de personas que se oponen al alcalde, x, sigue una distribución binomial $B(64; 0{,}42)$.

Para ello, hemos de suponer que el municipio es suficientemente grande como para que, al ir tomando individuos para la muestra, la proporción no varíe sensiblemente. Es decir, cada individuo que extraigamos modifica la proporción. Pero si el número total es grande, esa variación es irrelevante.

Tenemos que calcular $P[x > 32]$. Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media:

$$\mu = n \cdot p = 64 \cdot 0{,}42 = 26{,}88$$

y desviación típica:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{64 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}58} = 3{,}95$$

Así, si x es $B(64; 0{,}42) \rightarrow x'$ es $N(26{,}88; 3{,}95) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$. Por tanto:

$$P[x > 32] = P[x' \geq 32{,}5] = P\left[z \geq \frac{32{,}5 - 26{,}88}{3{,}95}\right] = P[z \geq 1{,}42] =$$

$$= 1 - P[z < 1{,}42] = 1 - 0{,}9222 = 0{,}0778$$

6 **La probabilidad de que un bebé sea varón es 0,515. Si han nacido 184 bebés, ¿cuál es la probabilidad de que haya 100 varones o más?**

Halla el intervalo característico correspondiente al 95 % para la proporción de varones en muestras de 184 bebés.

- El número de varones entre 184 bebés, x, sigue una distribución binomial $B(184; 0{,}515)$. Tenemos que calcular $P[x \geq 100]$. Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media:

$$\mu = np = 184 \cdot 0{,}515 = 94{,}76$$

y desviación típica:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{184 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485} = 6{,}78$$

Así, si x es $B(184; 0{,}515) \rightarrow x'$ es $N(94{,}76; 6{,}78) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$. Por tanto:

$$P[x \geq 100] = P[x' \geq 99{,}5] = P\left[z \geq \frac{99{,}5 - 94{,}76}{6{,}78}\right] = P[z \geq 0{,}70] =$$

$$= 1 - P[z < 0{,}70] = 1 - 0{,}7580 = 0{,}2420$$

- El intervalo característico para la proporción muestral es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Para el 95 % $\rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así, el intervalo será:

$$\left(0{,}515 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}515 \cdot 0{,}485}{184}};\ 0{,}515 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}515 \cdot 0{,}485}{184}}\right) = (0{,}4428; 0{,}5872)$$

Intervalos de confianza

7 **Se realizó una encuesta a 350 familias preguntando si poseían ordenador en casa, encontrándose que 75 de ellas lo poseían.**

Estima la proporción real de las familias que disponen de ordenador con un nivel de confianza del 95 %.

La proporción de familias con ordenador en la muestra es $pr = \frac{75}{350} = \frac{3}{14}$.

Para el 95 % de confianza, $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El intervalo de confianza para p es:

$$\left(\frac{3}{14} - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{(3/14)\,(1-(3/14))}{350}};\ \frac{3}{14} + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{(3/14)\,(1-(3/14))}{350}}\right) = (0{,}17;\ 0{,}26)$$

8 **Se selecciona aleatoriamente una muestra de 600 personas en una ciudad y se les pregunta si consideran que el tráfico en la misma es aceptablemente fluido. Responden afirmativamente 250 personas.**

¿Cuál es el intervalo de confianza de la proporción de ciudadanos de esa ciudad que consideran aceptable la fluidez del tráfico, con un nivel de confianza del 90 %?

La proporción muestral es:

$$pr = \frac{250}{600} = \frac{5}{12} \rightarrow 1 - pr = \frac{7}{12}$$

Para un nivel de confianza del 90 %, sabemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$.

El intervalo de confianza para la proporción de ciudadanos que consideran aceptable la fluidez del tráfico es:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}},\ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}\right)$$

En este caso queda:

$$\left(\frac{5}{12} - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{(5/12)\,(7/12)}{600}};\ \frac{3}{14} + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{(5/12)\,(7/12)}{600}}\right) = (0{,}3836;\ 0{,}4498)$$

Para resolver

9 **Sabemos que al lanzar al suelo 100 chinchetas, en el 95 % de los casos, la proporción de ellas que quedan con la punta hacia arriba está en el intervalo (0,1216; 0,2784).**

Di cuál es la probabilidad p de que una de esas chinchetas caiga con la punta hacia arriba y comprueba que la amplitud del intervalo dado es correcta.

- p es el centro del intervalo, es decir: $p = \frac{0{,}2784 + 0{,}1216}{2} = 0{,}2$
- Veamos que la amplitud del intervalo dado es correcta.

  Para el 95 % $\rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

  El intervalo característico es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

  En este caso ($p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $n = 100$; $z_{\alpha/2} = 1{,}96$), queda:

$$\left(0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}};\ 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}}\right) = (0{,}1216;\ 0{,}2784)$$

10 **Se desea estimar la proporción, p, de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos, de tamaño n.**

a) Si el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es igual al 30 %, calcula el valor de n para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error cometido en la estimación sea inferior al 3,1 %.

b) Si el tamaño de la muestra es de 64 individuos, y el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es del 35 %, determina, usando un nivel de confianza del 99 %, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

a) Para un nivel de confianza del 95 % $\to$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\to$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr(1-pr)}{n}}$

Buscamos n para que $E = 0{,}031$.

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{n}} = 0{,}031 \to n = 839{,}48$$

La muestra ha de ser de 840 individuos.

b) Para un nivel de significación del 1 %, tenemos que:

$$\alpha = 0{,}01 \to 1 - \alpha = 0{,}99 \to z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

El intervalo de confianza para p será:

$$\left(0{,}35 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{64}};\ 0{,}35 + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{64}}\right) = (0{,}196;\ 0{,}504)$$

11 **En una muestra de 100 rótulos publicitarios, se observa que aparecen 6 defectuosos.**

a) Estima la proporción real de rótulos defectuosos, con un nivel de confianza del 99 %.

b) ¿Cuál es el error máximo cometido al hacer la estimación anterior?

c) ¿De qué tamaño tendríamos que coger la muestra para obtener, con un nivel de confianza del 99 %, un error inferior a 0,05?

a) La proporción muestral es: $pr = \dfrac{6}{100} = 0{,}06 \to 1 - pr = 0{,}94$

Para un nivel de confianza del 99 %, sabemos que $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

El intervalo de confianza para estimar la proporción real de rótulos defectuosos es:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}},\ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}\right)$$

En este caso queda:

$$\left(0{,}06 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{100}};\ 0{,}06 + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{100}}\right) = (0;\ 0{,}12)$$

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr(1-pr)}{n}} = 2{,}575 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{100}} \approx 0{,}06$

c) En la expresión del error, sabemos que:

$E = 0{,}05$

$z_{\alpha/2} = 2{,}575$ (para un nivel de confianza del 99 %)

$pr = 0{,}06;\ 1 - pr = 0{,}94$

Por tanto:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \to 0{,}5 = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{100}} \to n \approx 149{,}58$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 150 rótulos.

Página 321

12 **En una encuesta realizada a 800 personas elegidas al azar del censo electoral, 240 declaran su intención de votar al partido A.**

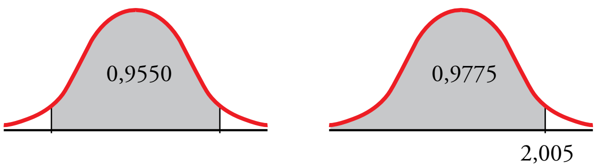
a) Estima, con un nivel de confianza del 95,5 %, entre qué valores se encuentra la intención de voto al susodicho partido en todo el censo.

b) Discute, razonadamente, el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento, o la disminución, del nivel de confianza.

La proporción muestral es:

$$pr = \frac{240}{800} = 0{,}3 \rightarrow 1 - pr = 0{,}7$$

a) Para un nivel de confianza del 95,5 %, hallamos $z_{\alpha/2}$:



$$1 - 0{,}9550 = 0{,}045; \ \frac{0{,}045}{2} = 0{,}0225$$

$$0{,}0225 + 0{,}9550 = 0{,}9775$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}9775 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}005$$

El intervalo de confianza para estimar la proporción en la población es:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}, \ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}\right)$$

En este caso queda:

$$\left(0{,}3 - 2{,}005 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{800}}; \ 0{,}3 + 2{,}005 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{800}}\right) = (0{,}2675; 0{,}3325)$$

La proporción de votantes del partido A en la población se encuentra, con un nivel de confianza del 95,5 %, entre el 26,75 % y el 33,25 %.

b) Si aumenta el nivel de confianza, mayor es la amplitud del intervalo; es decir, cuanto más seguros queramos estar de nuestra estimación, mayor será el error máximo admisible.

Si disminuye el nivel de confianza, también lo hará la amplitud del intervalo.

13 **Un estudio realizado por una compañía de seguros de automóviles establece que una de cada cinco personas accidentadas es mujer.**

Se contabilizan, por término medio, 169 accidentes cada fin de semana:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de mujeres accidentadas supere el 24 %?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de hombres accidentados supere el 85 %?

c) ¿Cuál es, por término medio, el número esperado de hombres accidentados cada fin de semana?

a) x: "número de mujeres accidentadas cada fin de semana"

$x \approx B(169; 0{,}2)$

La proporción de mujeres accidentadas cada fin de semana sigue una distribución:

$$x' \approx N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0{,}2; \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{169}}\right) = N(0{,}2; 0{,}03)$$

Así:

$$P[x' > 0{,}24] = P\left[z > \frac{0{,}24 - 0{,}2}{0{,}03}\right] = P[z > 1{,}33] = 1 - \phi(1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

b) La proporción de hombres accidentados cada fin de semana sigue una distribución:

$$y' \approx N\left(0{,}8;\ \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{169}}\right) = N(0{,}8;\ 0{,}03)$$

Así:

$$P[y' > 0{,}85] = P\left[z > \frac{0{,}85 - 0{,}8}{0{,}03}\right] = P[z > 1{,}67] = 1 - \phi(1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

c) El número de hombres accidentados cada fin de semana sigue una distribución $y \approx B(169;\ 0{,}8)$. Así, $\mu = n \cdot p = 169 \cdot 0{,}8 = 135{,}2$ es el "número esperado" de hombres accidentados cada fin de semana.

Cuestiones teóricas

14 **A partir de una muestra de tamaño 400, se estima la proporción de individuos que leen el periódico en una gran ciudad. Se obtiene una cota de error de 0,0392 con un nivel de confianza del 95 %.**

a) ¿Podríamos, con la misma muestra, mejorar el nivel de confianza en la estimación? ¿A costa de qué?

b) ¿Sabrías calcular la proporción, *pr*, obtenida en la muestra?

a) Aumentando la cota de error mejoraría el nivel de confianza.

b) La cota de error es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}$$

Como $E = 0{,}0392$; $n = 400$ y $1 - \alpha = 0{,}95 \to z_{\alpha/2} = 1{,}96$ tenemos que:

$$0{,}0392 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{400}} \to \frac{0{,}0392}{1{,}96} = \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{400}} \to$$

$$\to 0{,}02 = \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{400}} \to 0{,}0004 = \frac{pr(1-pr)}{400} \to$$

$$\to 0{,}16 = pr(1-pr) \to 0{,}16 = pr - pr^2 \to$$

$$\to pr^2 - pr + 0{,}16 = 0$$

$$pr = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0{,}64}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{0{,}36}}{2} = \frac{1 \pm 0{,}6}{2} \begin{cases} pr = 0{,}8 \\ pr = 0{,}2 \end{cases}$$

Podría ser $pr = 0{,}8$ o bien $pr = 0{,}2$. Con los datos que tenemos, no podemos decidir cuál de estos dos resultados es el válido.

Para profundizar

15 **a) Un fabricante de medicamentos afirma que cierta medicina cura una enfermedad de la sangre en el 80 % de los casos. Los inspectores de sanidad utilizan el medicamento en una muestra de 100 pacientes y deciden aceptar dicha afirmación si se curan 75 o más. Si lo que afirma el fabricante es realmente cierto, ¿cuál es la probabilidad de que los inspectores rechacen dicha afirmación?**

b) Supongamos que en la muestra se curan 60 individuos. Di, con una confianza del 95 %, cuál es el error máximo cometido al estimar que el porcentaje de efectividad del medicamento es del 60 %.

a) Si lo que dice el fabricante es cierto, tenemos que $p = 0{,}8 \to 1 - p = 0{,}2$.

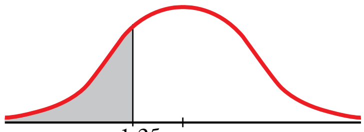
Considerando una muestra de tamaño $n = 100$, las proporciones muestrales, pr, siguen una distribución normal de media $p = 0{,}8$ y de desviación típica:

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{100}} = 0{,}04$$

es decir, pr es $N(0{,}8;\, 0{,}04)$.

La probabilidad de que los inspectores rechacen la afirmación es $P\left[pr < \frac{75}{100}\right]$.

Calculamos esta probabilidad:



$$P\left[pr < \frac{75}{100}\right] = P[pr < 0{,}75] = P\left[z < \frac{0{,}75 - 0{,}8}{0{,}04}\right] = P[z < -1{,}25] = P[z > 1{,}25] =$$

$$= 1 - P[z \le 1{,}25] = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$$

b) Si la proporción muestral es $pr = \frac{60}{100} = 0{,}6 \to 1 - pr = 0{,}4$.

Para $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ (nivel de confianza del 95 %), el error máximo será:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{100}} \approx 0{,}096$$

El error máximo cometido es de un 9,6 %, es decir, de 10 personas.

Autoevaluación

Página 321

1 En una población, la proporción de individuos que tienen una cierta característica C es 0,32.

a) ¿Cómo se distribuyen las posibles proporciones pr de individuos que tienen la característica C en muestras de 200 individuos?

b) Halla el intervalo característico de pr correspondiente a un nivel de confianza del 95 %.

c) Calcula la probabilidad de que en una muestra la proporción sea menor que 0,3.

a) En la población, $p = 0{,}32$.

Las proporciones muestrales, pr, se distribuyen $N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$.

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}32 \cdot 0{,}68}{200}} = 0{,}033$$

Es decir, pr se distribuye $N(0{,}32;\ 0{,}033)$.

b) En una $N(0, 1)$, el intervalo característico correspondiente al 95 % es $(-1{,}96;\ 1{,}96)$.

$$0{,}32 - 1{,}96 \cdot 0{,}033 = 0{,}255$$

$$0{,}32 + 1{,}96 \cdot 0{,}033 = 0{,}647$$

El intervalo característico para pr (al 95 %) es $(0{,}255;\ 0{,}647)$.

c) $P[pr < 0{,}3] = P\left[z < \dfrac{0{,}3 - 0{,}32}{0{,}033}\right] = P[z < -0{,}61] = 1 - \phi(0{,}61) = 1 - 0{,}7291 = 0{,}2709$

2 Se sabe que el 10 % de los habitantes de una determinada ciudad va regularmente al teatro. Se toma una muestra al azar de 100 habitantes de esta ciudad.

¿Cuál es la probabilidad de que, al menos, un 13 % de ellos vaya regularmente al teatro?

La distribución x = "número de personas que van regularmente al teatro" es una $B(100;\ 0{,}1)$, donde $p = 0{,}1$ y $q = 1 - p = 0{,}9$.

Como $100 \cdot 0{,}1 > 5$ y $100 \cdot 0{,}9 > 5$, aproximamos con una distribución $x' \approx N(np, \sqrt{npq}) = N(10, 3)$, a la que aplicamos la corrección por continuidad:

$$P[x \geq 13] = P[x' \geq 12{,}5] = P\left[z \geq \frac{12{,}5 - 10}{3}\right] = P[z \geq 0{,}83] =$$

$$= 1 - \phi(0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$$

3 En una muestra de 60 estudiantes de una universidad, un tercio habla inglés.

a) Halla, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de estudiantes que hablan inglés en esa universidad.

b) A la vista del resultado anterior, se va a repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0,01 con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos individuos deberá tener la muestra?

La proporción muestral es:

$$pr = \frac{1}{3} \rightarrow 1 - pr = \frac{2}{3}$$

Para un nivel de confianza del 90 %, sabemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$.

a) El intervalo de confianza para estimar la proporción en la población es:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}},\ \ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}\right)$$

En este caso queda:

$$\left(\frac{1}{3} - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{(1/3) \cdot (1/2)}{60}};\ \frac{1}{3} + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{(1/3) \cdot (1/2)}{60}}\right) = (0{,}2332;\ 0{,}4334)$$

b) En la expresión del error, $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}$, sabemos que:

$E = 0{,}01$

$z_{\alpha/2} = 1{,}645$ (para un nivel de confianza del 90 %)

$pr = \frac{1}{3};\ 1 - pr = \frac{2}{3}$

Por tanto:

$$0{,}01 = 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{(1/3) \cdot (1/2)}{60}} \to n \approx 6\,013{,}4$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 6 014 individuos.

4 **Una encuesta realizada en cierto país sobre una muestra de 800 personas arroja el dato de que 300 son analfabetas. Para estimar la proporción de analfabetos del país, hemos obtenido el intervalo de confianza (0,3414; 0,4086). ¿Con qué nivel de confianza se ha hecho la estimación?**

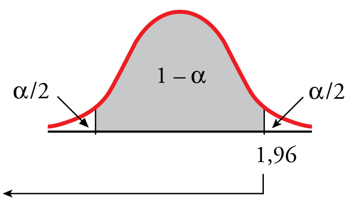
La proporción muestral es: $pr = \frac{300}{800} = \frac{3}{8} \to 1 - pr = \frac{5}{8}$

El error máximo admisible es la semiamplitud del intervalo de confianza; es decir:

$$E = \frac{0{,}4086 - 0{,}3414}{2} = 0{,}0336$$

Por tanto:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \to 0{,}0336 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(3/8) \cdot (5/8)}{800}} \to z_{\alpha/2} = 1{,}96$$



$P[z \le 1{,}96] = 0{,}9750$

$\frac{\alpha}{2} = P[z > 1{,}96] = 1 - 0{,}9750 = 0{,}025$

$\alpha = 0{,}025 \cdot 2 = 0{,}05 \to 1 - \alpha = 0{,}95$

El nivel de confianza es del 95 %.