1) Representa gráficamente la función:

$$f(x)=\begin{cases}2^{x} & \text{si } x>0\\ 2^{-x} & \text{si } x<0\end{cases}$$

2) Halla una función exponencial de la forma:

$$f(x)=b\cdot a^{-x}+c$$

Con las siguientes condiciones:
- Tiene una asíntota horizontal de ecuación $y=32$
- Corta al eje de ordenadas en $y=212$
- Pasa por el punto $P(2,112)$

3) Representa e indica algunas propiedades importantes de la función $y=2^{|x|}$.

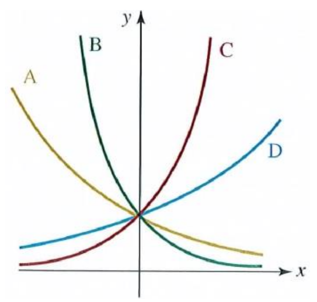
4) De la función $f(x)=k\cdot a^{x}$ se sabe que $f(0)=5$ y $f(3)=40$.
a) ¿Cuánto valen k y a?
b) ¿Cuánto vale $f(2)$?
c) Razona si es o no una función inyectiva.
d) Halla la inversa $f^{-1}(x)$.
e) ¿Cuál es el recorrido de la función?

5) Representar gráficamente las siguientes funciones, indicando después dominio y recorrido:

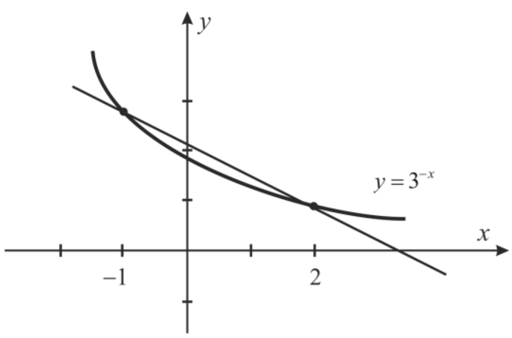
a) $y=1+3^{-x}$ b) $y=1-\log_3 x$
c) $y=\frac{1}{2}\log_2(x-1)$ d) $y=2^{x}+2^{-x}$
e) $y=\log_2(x-4)+1$ f) $y=e^{x}-2$

6) Indicar la correspondencia de la letra en la gráfica con la función adecuada.

i) $f(x)=b^{x}$, $b>2$ ii) $f(x)=b^{x}$, $1<b<2$
iii) $f(x)=b^{x}$, $1/2<b<1$ iv) $f(x)=b^{x}$, $0<b<1/2$



7) Halla la ecuación de la recta que se muestra en la figura:



8) Hallar $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y f/g en los siguientes casos:
a) $f(x)=x-3$, $g(x)=x^2$
b) $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=3x^2-1$
c) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $g(x)=\sqrt{1+x}$

9) Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\sqrt{2-x}$ hallar las siguientes funciones:

a) $f\circ g$ b) $g\circ f$ c) $f\circ f$ d) $g\circ g$

10) Dadas las funciones *f* y *g* determinar $(f\circ g)$ y $(g\circ f)$ en los siguientes casos:
a) $f(x)=2x+3$; $g(x)=2x-x^2$
b) $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=\frac{2}{x-4}$
c) $f(x)=x^3+3$; $g(x)=1-x^{-1}$
d) $f(x)=\frac{1}{x+2}$; $g(x)=\frac{4}{x-1}$
e) $f(x)=\frac{x-5}{x+1}$; $g(x)=\frac{x+2}{x-3}$
f) $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$; $g(x)=\frac{x+4}{2x+5}$
g) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$; $g(x)=\frac{1}{x-1}$

11) El número N de coches producidos en una fábrica en un día después de t horas de trabajo viene dada por:

$$N(t)=100t-5t^2,\quad 0\le t\le 10$$

Si es coste C (en euros) de producir N coches es:

$$C(N)=15.000+8.000N$$

Hallar el coste C como una función del tiempo t de trabajo de la fábrica.

12) Hallar la función inversa de *f* en los siguientes casos:

a) $f(x)=2x+1$ b) $f(x)=6-4x$
c) $f(x)=\frac{x}{10}$ d) $f(x)=\frac{3-5x}{2}$
e) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $x>0$ f) $f(x)=\frac{1}{x+2}$
g) $f(x)=1+\sqrt[5]{x-2}$ h) $f(x)=3+\sqrt{x}$
i) $y=\frac{2x+3}{x-1}$ j) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $0\le x\le 1$

13) Hallar el dominio de las siguiente funciones:

a) $f(x)=\log_2(2x-4)$ b) $f(x)=\log\left(x^2-2x\right)$
c) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ d) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$
e) $\log_3\left(\frac{3-x}{x+3}\right)$ f) $\ln|x-2|$

14) Un recipiente contiene 400 litros de agua, que salen de una fuga en el fondo, lo que causa que el recipiente se vacíe en 40 minutos. La ley de Torricelli proporciona el volumen de agua que permanece en el recipiente después de *t* minutos como

$$V(t) = 400\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$$

a) Hallar V^{-1}. ¿Qué representa V^{-1}?

b) Determinar $V^{-1}(15)$. ¿Qué representa esta respuesta?

15) La inflación es la pérdida del valor adquisitivo del dinero, es decir, si un bolígrafo costó el año pasado 1 euro, este año cuesta 1,1 euros, es decir, la inflación ha sido del 10% anual.

Si la inflación se mantiene constante en un 10% anual, la expresión de la función que da el coste de este bolígrafo al cabo de *t* años es:

$$y = \left(1 + \frac{10}{100}\right)^t$$

a) Dibuja la gráfica que muestra el coste del bolígrafo en el pasado y en el futuro.

b) ¿Cuánto costará este bolígrafo dentro de 15 años? ¿Y hace 5 años?

c) ¿Cuántos años han de pasar para que el bolígrafo valga 2 euros?

16) El número de espectadores, en miles, que ven hasta el final un programa de televisión decrece en función del tiempo de las pausas publicitarias, según los datos de la tabla:

Tiempo anuncios (min)	0	1	2	3
Nº telespectadores	200	143	102	72,9

a) Encuentra la función que se ajusta a dicha situación.

b) Hallar el máximo tiempo de anuncios que se puede incluir en la emisión si el programa es viable siempre que tenga un mínimo de 38.000 espectadores.

17) Una colonia de bacterias crece de acuerdo a una ley de crecimiento exponencial siguiendo la siguiente expresión:

$$N(t) = 100 \cdot e^{0{,}045t}$$

Donde *N* se mide en gramos y *t* se mide en días.

a) ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

b) ¿Cuál será la población después de 5 días?

c) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la población alcance los 140 gramos?

d) ¿Cuánto tiempo tarda en duplicarse la población?

18) El crecimiento de una colonia de mosquitos sigue un crecimiento exponencial que puede ser modelado con la siguiente ecuación: $A(t) = A_0 \cdot e^{kt}$

(*t* representa el tiempo transcurrido en minutos).

Si inicialmente había 1000 mosquitos y después de un día la población de éstos aumenta a 1800:

a) Halla el valor de *k*.

b) ¿Cuántos mosquitos habrán en la colonia después de 3 días?

c) ¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que la colonia tenga 10000 mosquitos?

19) El crecimiento de dos tipos distintos de bacterias se rige, respectivamente por:

$N_1 = 6{,}2\, e^{0{,}49t}$, $N_2 = 4{,}1\, e^{0{,}54t}$ (*t*: horas; $N(t)$: miles)

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo coincidirá el número de bacteria de cada tipo?

b) A partir de este momento, ¿qué cultivo crecerá más rápidamente?

20) Según la ley de enfriamiento de Newton, un objeto caliente rodeado de un medio más frio y de temperatura constante se enfría siguiendo la siguiente expresión:

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$$

donde T_m es la temperatura constante del medio que rodea al objeto y T_0 es la temperatura inicial del objeto y *k* una constante negativa.

Un objeto es calentado a $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ y se deja enfriar en una habitación de temperatura constante de $30\,^{\circ}\mathrm{C}$.

a) Si al cabo de 5 minutos la temperatura del objeto es de $80\,^{\circ}\mathrm{C}$, ¿cuándo será la temperatura de $50\,^{\circ}\mathrm{C}$?

b) Determinar el tiempo necesario para que la temperatura alcance los $35\,^{\circ}\mathrm{C}$.

c) ¿Cómo evolucionará la temperatura con el paso del tiempo?

d) Esbozar la gráfica de la función $T(t)$.

21) El radio es un elemento radiactivo. Una muestra de radio se descompone por emisión de radiaciones de acuerdo con la ecuación:

$$m = 10 \cdot e^{-4{,}36 \cdot 10^{-4}\, t}$$

Donde *m* es la masa de la muestra en gramos y *t* es el tiempo expresado en años.

a) ¿Cuántos gramos de radio hay inicialmente en la muestra?

b) ¿Cuántos gramos de radio habrá al cabo de 1000 años?

c) El periodo de desintegración de un elemento radiactivo se define como el tiempo que tarda una determinada cantidad de este elemento en reducirse a la mitad. Calcula el periodo de desintegración del radio.

d) Esboza de forma aproximada como sería la gráfica de la función $m(t)$, representando en el eje de abscisas el tiempo (en años) y en el de ordenadas la masa (en gramos) de la muestra.

22) En un laboratorio de idiomas se ha obtenido experimentalmente que la curva de aprendizaje correspondiente a las rutinas de memorizar y escribir palabras de japonés viene dada por la expresión:

$$f(x) = 200\left(1 - e^{-0{,}1x}\right)$$

Siendo *x* el número de clases recibidas, a razón de una hora diaria, y $f(x)$ el número de palabras memorizadas y escritas cada clase, por término medio. Responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué número de palabras se memorizan y escriben después de 5 días de entrenamiento?

b) ¿Y después de 10 días? ¿Y de 15 días?

c) Dibuja la gráfica de la función.

d) ¿Se podrán memorizar 200 palabras?

23) La eficiencia de un operario en una fábrica está dada por la función $f(t)=100-60\cdot e^{-\frac{t}{5}}$, donde el operario puede completar $f(t)$ unidades de trabajo por día después de efectuar dicha tarea durante *t* meses.
a) Trazar la gráfica de f y describir el comportamiento de f a medida que *t* aumenta sin límite.
b) ¿Cuántas unidades diarias puede terminar un operario principiante?
c) ¿Cuántas unidades diarias puede terminar un operario con un año de experiencia?
d) ¿Cuántas unidades diarias cabe esperar que pueda terminar un operario muy veterano?

25) El crecimiento de una colonia de abejas está determinado por la siguiente ecuación:

$$P(t)=\frac{230}{1+56{,}5e^{-0.37t}}$$. (t es el tiempo en días)

a) ¿Cuántas abejas habían inicialmente?
b) ¿Cuántas habrá pasados 10 días?
c) ¿Cuánto tiempo le tomará a las abejas tener una población igual a 180?

26) Deducir una función $f(x)=a+\log_3(x-c)$ si $f(11)=10$ y su gráfica tiene una asíntota vertical $x=2$.

27) Para describir los efectos de un terremoto se utiliza la escala de Richter. Según esta escala, la magnitud *M* de un terremoto viene dada por la expresión: $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$

E: Energía liberada por el terremoto en julios.
E_0: Constante de valor $2{,}5\cdot10^4$ julios.

a) Calcula la energía liberada por el terremoto de Méjico del año 1985 si su magnitud fue 7,8 en la escala de Richter.
b) Halla la magnitud en la escala de Richter del terremoto de San Francisco de 1906 sabiendo que se liberó aproximadamente $5{,}96\cdot10^{16}$ julios.
b) Esboza de forma aproximada la gráfica de la función *M* considerando a *E* como variable independiente.

28) La escala Decibel para la intensidad del sonido es un ejemplo de escala logarítmica. Esta escala que debe su nombre al inventor del teléfono Alexandre Graham Bell (1847-1922), se define de la siguiente forma:

$$D=10\log\frac{I}{I_0}$$

Donde *D* es el nivel en decibelios del sonido, *I* es la intensidad del sonido (en W/m^2) y I_0 es la intensidad del menor sonido audible en término medio por una persona joven y sana. Este valor se ha estandarizado a $I_0=10^{-12}\ W/m^2$
a) Hallar el número de decibelios para un suspiro con una intensidad de $5{,}2\cdot10^{-10}\ W/m^2$ y para unas condiciones de tráfico intenso de $8{,}5\cdot10^{-4}\ W/m^2$.
b) ¿Cuántas veces es mayor la intensidad del sonido del tráfico que el del suspiro?
c) ¿Qué intensidad de sonido corresponde a un valor de 55 dB?

29) El brillo de una estrella se mide en términos de su "magnitud" en una escala numérica que aumenta a medida que el brillo disminuye. Dicha magnitud *m* viene dada por la fórmula:

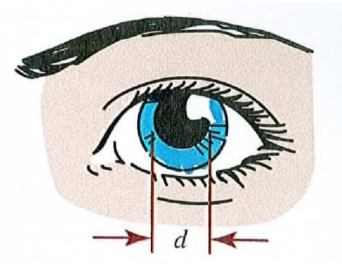
$$m=6-2{,}5\log\frac{L}{L_0}$$

Donde *L* es el flujo de luz de la estrella y L_0 es el flujo de luz de la estrella menos brillante visible por el ojo humano.

a) ¿Cuál es la magnitud de la estrella de brillo más débil visible por el ojo humano?
b) ¿Cuántas veces brilla más una estrella de magnitud 1 que otra de magnitud 6?

30) Un modelo empírico, inventado por DeGroot y Gebhard, relaciona el diámetro *d* de la pupila, en milímetros, con la luminosidad *B* de la fuente luminosa (expresada en una unidad llamada miliamberts, mL):

$$\log d=0{,}8558-0{,}000401(8{,}1+\log B)^3$$



a) La luminosidad media del cielo claro es aproximadamente de $B=255$ mL. Calcular el diámetro de pupila correspondiente.
b) La luminosidad del Sol varía entre 190.000 mL en la aurora y 51.000.000 mL a mediodía. Calcular el aumento de diámetro que se produce entre ambos instantes.
c) Calcular la luminosidad *B* que corresponde a un diámetro de pupila de 7 mm.

31) Algunos estudios para relacionar el nivel de colesterol con las enfermedades coronarias del corazón sugieren que un factor de riesgo *x* es el cociente entre la cantidad total de colesterol en sangre y una cantidad *H* de una lipoproteína de alta densidad presente en el colesterol sanguíneo. Para una mujer, el riesgo *R* de sufrir un infarto puede calcularse de forma aproximada por la expresión:

$$R=2{,}07\ln x-2{,}04 \quad \text{con } 0\le R\le 1$$

Por ejemplo, si $R=0{,}65$, entonces hay un 65% de probabilidad de que una mujer tengo un infarto a lo largo de su vida.

a) Calcular *R* para una mujer con $C=242$ y $H=78$.
b) Representar gráficamente la función $R(x)$.
c) Estimar gráficamente el valor de *x* cuando el riego es del 75%.