BLOQUE I
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Página 128

1 **Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 2x - \;\; y = 3 \\ x + \;\; y = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 2x - \;\; y = 3 \\ x + \;\; y = 2 \end{array}\right\}$ Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 2.ª y 3.ª:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x = 5 \;\to\; x = 5/3 \\ y = 2 - x \longrightarrow y = 1/3 \end{array}$$

Comprobamos si $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ verifica la 1.ª ecuación:

$$\frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \neq 5$$

El sistema no tiene solución. Representa tres rectas que se cortan dos a dos.

b) $\left.\begin{array}{r} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ Ordenamos las incógnitas y las ecuaciones: $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + \;\; z = 0 \\ x + \;\; y - 2z = 0 \\ -2x + \;\; y + \;\; z = 0 \end{array}\right.$

Para resolverlo, aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + \;\; z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{r} x - 2y = -z \\ y = \;\; z \end{array}\right. \to \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\lambda = \lambda \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, \lambda)$.

2 **Comprueba que el siguiente sistema es compatible determinado. Halla su solución e interprétalo geométricamente:**

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Si el sistema es *compatible determinado*, debe verificarse que $ran\,(M) = ran\,(M') = 3$, según el teorema de Rouché. Como M' es una matriz cuadrada de orden 4, su determinante debe ser igual a 0.

$$|M'| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(1.^a)\\(4.^a)+(1.^a)}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ porque la 2.ª y 4.ª filas son iguales.

Podemos eliminar la última ecuación y resolverlo por la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y \quad = 1 \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{3}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{2}{5}$$

Solución: $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$. Representa cuatro planos que se cortan en un punto.

3 **Discute este sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo cuando tenga solución.**

$$\begin{cases} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} ax + y \quad = a \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\}$$ Según el teorema de Rouché, el sistema será compatible si $ran\,(M) = ran\,(M')$.

Estudiamos el rango de M buscando los valores que hacen $|M| = 0$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a - 1 = 0 \to a = -1$$

Si $a = -1$, $ran\,(M) = 2$ porque $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Estudiamos el rango de M' para $a = -1$:

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran\ (M') = 2$$

Así:

- **Si $\boldsymbol{a = -1}$**: $ran\ (M) = ran\ (M') = 2$, el sistema es *compatible indeterminado*.
- **Si $\boldsymbol{a \neq -1}$**: $ran\ (M) = ran\ (M') = 3$, el sistema es *compatible determinado*.

— *Resolución* si $a = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y \quad = -1 \\ 2y + z = \ \ 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \lambda \ \rightarrow \ x = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2y \ \rightarrow \ z = 2 - 2\lambda \end{array}$$

Soluciones: $(1 + \lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)$.

— *Resolución* si $a \neq -1$. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 2$$

Solución: $(1, 0, 2)$

4 Considera este sistema:

$$\left\{\begin{array}{r} -x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ 4y + az = 2 \\ x + 2y \qquad = 1 \\ x + ay + 2z = 1 \end{array}\right.$$

a) ¿Es posible encontrar valores de $\boldsymbol{a}$ tales que el sistema sea incompatible?

b) ¿Es posible encontrar valores de $\boldsymbol{a}$ tales que el sistema sea compatible indeterminado?

Justifica tus respuestas.

a) El sistema será incompatible si $ran\ (M) \neq ran\ (M')$. Estudiemos el rango de M':

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ a+1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2a^2 + 6a = -2a(a-3) = 0 \rightarrow a = 0,\ a = 3$$

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ y $\boldsymbol{a \neq 3}$, $ran\ (M') = 4$ y $ran\ (M) < 4$ para cualquier valor de a. Por tanto, el sistema es *incompatible*.

b) Estudiemos el rango de M y M' en los casos $a = 0$ y $a = 3$:

- $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (M) = ran\ (M') = 3$$

El sistema es *compatible determinado*.

- $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (M) = ran\ (M') = 3$$

El sistema es *compatible determinado*.

No existe ningún valor de a tal que el sistema sea *compatible indeterminado*.

5 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halla los valores de m y n para que se verifique $A^2 + mA + nI = 0$.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m & 5m \\ 2m & -m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 + 2m + n & 5 + 5m \\ 2 + 2m & 11 - m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 14 + 2m + n = 0 \\ 5 + 5m = 0 \ \rightarrow \ m = -1 \\ 2 + 2m = 0 \\ 11 - m + n = 0 \ \rightarrow \ n = -12 \end{cases}$$

Así, $m = -1$ y $n = -12$.

6 **a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación y halla su valor:**

$2A - AX = BX$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^{12} + A^{-1}$.

a) $2A - AX = BX \ \rightarrow \ 2A = BX + AX \ \rightarrow \ 2A = (B + A)X \ \rightarrow$

$\rightarrow \ (B + A)^{-1} \cdot 2A = (B + A)^{-1}\ (B + A)X \ \rightarrow$

$\rightarrow \ (B + A)^{-1}\ 2A = I \cdot X \ \rightarrow \ X = (B + A)^{-1}\ 2A$

$$B + A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallamos $(B + A)^{-1}$:

$$|B + A| = 12; \ \ Adj\,(B + A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow [Adj\,(B + A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (B + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (B + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \\ \\ 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{12} = A^4 \cdot A^4 \cdot A^4 = I^3 = I$$

Hallamos A^{-1}:

$$|A| = 1 \rightarrow Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow [Adj\,(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{12} + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7 **Sea M una matriz de orden tres cuyas filas son F_1, F_2, F_3 y de la que sabemos que *det* (M) = –2. ¿Cuál será el valor del determinante de la matriz cuyas filas son $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$? Justifica tu respuesta.**

$M = (F_1 \ \ F_2 \ \ F_3)$, $|M| = -2$

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 + F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4$$

(1) Cambiamos el signo del determinante al permutar F_1 y F_2.

(2) Sacamos como factor común el 2 en F_1 y –1 en F_2.

(3) El valor del determinante no cambia al restar F_1 a F_2, ni al sumar F_2 a F_3.

8 **Prueba, sin desarrollar el determinante, esta igualdad:**

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ba \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2(a^2 - b^2)^2$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ba \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a \begin{vmatrix} a & ab & ba \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\begin{array}{l}\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - b(1.^a) \\ (3.^a) - b(1.^a)\end{array}}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} a^2\,(a^2 - b^2)^2$$

(1) Sacamos a como factor común de la 1.ª columna.

(2) Sacamos a como factor común de la 1.ª fila.

(3) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

9 **Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres tipos de envases, *A*, *B* y *C*, cuyos precios y pesos son los de esta tabla:**

	PESO (g)	PRECIO (€)
A	250	1,00
B	500	1,80
C	1 000	3,30

A una farmacia se le ha suministrado un pedido de 5 envases con un peso total de 2,5 kg por un importe de 8,90 €. ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia?

Llamemos: $\left\{\begin{array}{l} x = \text{n.° de envases de } A \\ y = \text{n.° de envases de } B \\ z = \text{n.° de envases de } C \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x + y + z = 5 \\ 0{,}25x + 0{,}5y + z = 2{,}5 \\ x + 1{,}8y + 3{,}3z = 8{,}9 \end{array}\right.$

Resolvemos por la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 \\ 1 & 1{,}8 & 3{,}3 \end{vmatrix} = -0{,}025$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 8{,}9 & 1{,}8 & 3{,}3 \end{vmatrix}}{-0{,}025} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0{,}25 & 2{,}5 & 1 \\ 1 & 8{,}9 & 3{,}3 \end{vmatrix}}{-0{,}025} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 2{,}5 \\ 1 & 1{,}8 & 8{,}9 \end{vmatrix}}{-0{,}025} = 1$$

Solución: La farmacia ha comprado 2 envases del producto *A*, 2 del *B* y 1 del *C*.

10 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$**:**

a) Estudia su rango según los valores de m**, y di para cuáles de ellos es invertible.**

b) Halla, si es posible, la inversa para $m = 2$**, y comprueba el resultado.**

a) Calculamos los valores de m tales que $|A| = 0$:

$$|A| = 2(m-1)(m-2) + m + m(m-2) = 3m^2 - 7m + 4 \to$$

$$\to 3m^2 - 7m + 4 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = 4/3 \end{cases}$$

- **Si** $m \neq 1$ **y** $m \neq \frac{4}{3}$: $ran\ (M) = 3 \to$ la matriz A es invertible.

- **Si** $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\ (M) = 2$$

- **Si** $m = \frac{4}{3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -1 \\ 0 & -2/3 & 1 \\ 4/3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & -2/3 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\ (M) = 2$$

b) **Si** $m = 2$, $|A| \neq 0$; la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es regular.

Calculamos A^{-1}:

$$|A| = 3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 4 = 2$$

$$Adj\ (A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to [Adj\ (A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos el resultado:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, **determina todas las matrices no nulas** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **que verifican la igualdad** $AX = mX$, **para algún valor de** m.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 2y - z = mx \\ -x + z = my \\ -x - 2y + 3z = mz \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} (3-m)x + 2y - z = 0 \\ -x - my + z = 0 \\ -x - 2y + (3-m)z = 0 \end{array}\right.$$

Estudiamos el sistema según los valores de m:

$$\begin{vmatrix} 3-m & 2 & -1 \\ -1 & -m & 1 \\ -1 & -2 & 3-m \end{vmatrix} = -m^3 + 6m^2 - 12m + 8 \rightarrow$$

$\rightarrow -m^3 + 6m^2 - 12m + 8 = 0 \rightarrow m = 2$ (raíz triple)

Si $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{array}\right.$$

Todas las ecuaciones son proporcionales. El sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(\mu - 2\lambda, \lambda, \mu)$.

Para $m = 2$, hay infinitas matrices $X = \begin{pmatrix} \mu - 2\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, no simultáneamente iguales a 0, que verifican la igualdad $AX = mX$.

Por ejemplo, si $\lambda = 1$ y $\mu = 1 \rightarrow A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$**, obtén todas las matrices** B **que conmutan con** A**; es decir, tales que** $A \cdot B = B \cdot A$**.**

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \\ \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} c = b \\ \left.\begin{array}{l} d = a-b \\ a-c = d \end{array}\right\} d = a-b \\ b-d = c-d \;\rightarrow\; b = c \end{array}\right.$$

Hay infinitas soluciones. Las matrices B que cumplen $A \cdot B = B \cdot A$ son de la forma:

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ con $a, \; b \in \mathbb{R}$

Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$